

07 Vergelijkingen en ongelijkheden

CORRECTIESLEUTEL

Inhoud

- 1 Toepassen van gelijkheden
- 2 Graadsvergelijkingen algebraïsch oplossen
- 3 Systemen oplossen met vergelijkingen
- 4 Omvormen van formules
- 5 Ongelijkheden oplossen
- 6 Problemen oplossen met ongelijkheden
- 7 Vergelijkingen en ongelijkheden met één parameter
- Computationeel denken**
- Signaaloefeningen**
- Differentiatietraject**
- Studiewijzer**



WAT JE AL KUNT

- de eigenschappen van gelijkheden toepassen
- vergelijkingen oplossen in $\mathbb{Q}$
- problemen oplossen met behulp van een vergelijking
- eenvoudige formules omvormen naar één onbekende



WAT JE LEERT IN DEZE MODULE

- de eigenschappen van gelijkheden toepassen
- vergelijkingen algebraïsch oplossen in $\mathbb{R}$
- formules omvormen naar één onbekende
- ongelijkheden algebraïsch oplossen in $\mathbb{R}$
- problemen oplossen met vergelijkingen en ongelijkheden
- vergelijkingen en ongelijkheden met één parameter oplossen en bespreken



IN DE KIJKER

Controleer de verkregen oplossing door die terug in te vullen in de vergelijking en formuleer een antwoordzin.



WISKUNDETAAL

- gelijkheid
- linkerlid
- rechterlid
- $=, <, >, \leq, \geq$
- oplossingenverzameling
- onbekende
- vergelijking
- onbepaalde vergelijking
- valse vergelijking
- parameter
- parametervergelijking
- ongelijkheid
- referentieverzameling
- valse ongelijkheid
- onbepaalde ongelijkheid
- omvormen van formules



Instap

Opdracht 1

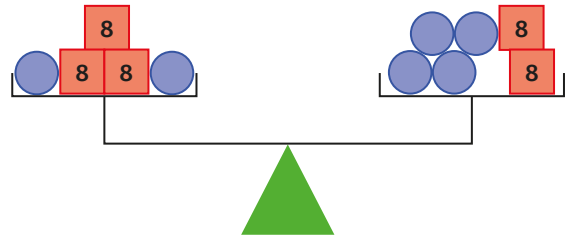
Bepaal de massa van 1 bol. Noteer in een stappenplan naast de tekeningen jouw redenering.

$$2x + 24 = 4x + 16$$

$$2x - 4x = 16 - 24$$

$$-2x = -8$$

$$x = 4$$



De massa van de bol is kg.

Opdracht 2

Vul aan met = of ≠.

a) $2\pi + 7\pi$ $7\pi + 2\pi$

d) $4b - b - 3b$ b

b) $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$ $\sqrt{6}$

e) $2(3x - 1)$ $6x - 1$

c) $3 \cdot \frac{2}{5}$ $\frac{6}{5}$

f) $-(x - 4)$ $4 - x$

Opdracht 3

Controleer, zonder de vergelijking op te lossen, welke van de vergelijkingen -2 als oplossing heeft.

☐ $5 - x = 3$

☒ $3x + 2 = -4$

☐ $8x = 16$

☐ $\frac{x}{14} = -7$

☒ $\frac{-10}{4}x = 5$

Opdracht 4

Tijdens de zomer verkoopt Elias Berlijnse bollen. Hij verkoopt ze voor 2,50 euro per stuk.

- a) Noteer een passende vergelijking: bij een verkochte hoeveelheid q heeft hij een omzet van 300 euro.

$$2,5 \cdot q = 300$$

- b) Bepaal het aantal verkochte Berlijnse bollen bij een omzet van 300 euro.

$$2,5 \cdot q = 300$$

$$q = 300 : 2,5$$

$$q = 120$$



- c) Wat betekent $2,5q < 300$ in deze context?

Het aantal Berlijnse bollen die Elias verkoopt die een omzet geven die lager is dan 300 euro.

- d) Voor welke waarden van q klopt de uitdrukking $2,5q < 300$?

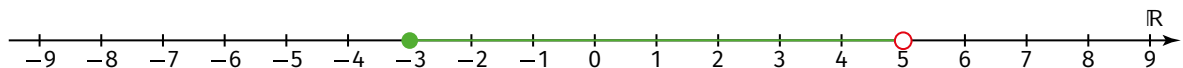
$$q < 120$$

Alle waarden kleiner dan 120.

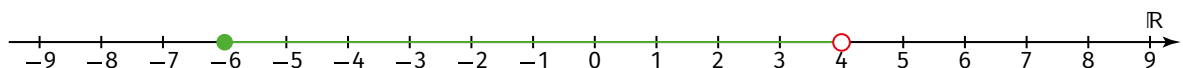
Opdracht 5

Stel de volgende intervallen of ongelijkheden voor op de getallenas.

- a) $-\sqrt{9} \leq x < 5$



- b) $\left[-\frac{18}{3}; 4\right[$



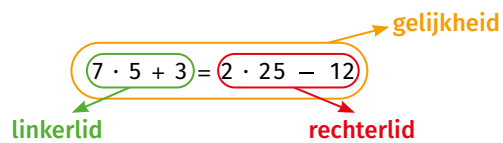
Noteer de onderstaande zin van een ongelijkheid.

Alle reële getallen die groter zijn of gelijk zijn aan -2π en kleiner zijn dan 8π .

$$-2\pi \leq x < 8\pi$$

1 Eigenschappen van gelijkheden

A) Woordenschat



B) Eigenschappen

Onderzoek: Blijven de eigenschappen van gelijkheden ook gelden bij de verzameling van de reële getallen?

Onderzoek 1: Wat gebeurt er met de gelijkheid als we in beide leden een reëel getal toevoegen?

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$
$$10\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

eigenschap | Als je in beide leden van een gelijkheid hetzelfde getal optelt, ontstaat opnieuw een gelijkheid.

Onderzoek 2: Wat gebeurt er met de gelijkheid als we in beide leden een reëel getal wegnemen?

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$$
$$6\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

eigenschap | Als je in beide leden van een gelijkheid hetzelfde getal aftrekt, ontstaat opnieuw een gelijkheid.

Onderzoek 3: Wat gebeurt er met de gelijkheid als we beide leden met reëel getal vermenigvuldigen?

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad (3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}) \cdot 4 = 8\sqrt{2} \cdot 4$$
$$8\sqrt{2} \cdot 4 = 8\sqrt{2} \cdot 4$$
$$32\sqrt{2} = 32\sqrt{2}$$

eigenschap | Als je beide leden van een gelijkheid vermenigvuldigt met hetzelfde getal, ontstaat opnieuw een gelijkheid.

Onderzoek 4: Wat gebeurt er met de gelijkheid als we beide leden met reëel getal vermenigvuldigen?

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad (3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}) : 4 = 8\sqrt{2} : 4$$
$$\frac{8\sqrt{2}}{4} = \frac{8\sqrt{2}}{4}$$
$$2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

eigenschap | Als je beide leden van een gelijkheid deelt door hetzelfde getal, ontstaat opnieuw een gelijkheid.



Verwerkingsopdracht



1

Welke eigenschap van gelijkheden werd er toegepast?

a) $\frac{5\pi}{2}x = 3 \Rightarrow 5\pi x = 3 \cdot 2$

Als je beide leden van een gelijkheid vermenigvuldigt met hetzelfde getal, ontstaat opnieuw een vergelijking.

b) $\sqrt{5}x + 4 = 1 \Rightarrow \sqrt{5}x + 1 = -2$

Als je in beide leden van een gelijkheid hetzelfde getal aftrekt, ontstaat opnieuw een gelijkheid.

c) $3x = 9 \Rightarrow 3x + \sqrt{2} = 9 + \sqrt{2}$

Als je in beide leden van een gelijkheid hetzelfde getal optelt, ontstaat opnieuw een gelijkheid.

d) $\sqrt{8}x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{8}}$

Als je beide leden van een vergelijking deelt door hetzelfde getal, verschillend van nul, ontstaat opnieuw een gelijkheid.

2 Eerstegraadsvergelijkingen algebraïsch oplossen

2.1 Eerstegraadsvergelijkingen oplossen

In de eerste graad leerde je al eerstegraadsvergelijkingen in 1 onbekende algebraïsch oplossen. Omdat je nu ook reële getallen kent, kunnen we vergelijkingen opstellen zodat de oplossing een reëel getal is. We hernemen even het stappenplan.

Een vergelijking oplossen

methode

STAP 1: Als er haakjes voorkomen, werk je die eerst weg.

STAP 2: Door bij beide leden eenzelfde getal op te tellen of van beide leden eenzelfde getal af te trekken, breng je alle termen waarin de onbekende voorkomt samen in één lid en alle overige termen in het andere lid.

STAP 3: Schrijf beide leden eenvoudiger door de optellingen en/of aftrekkingen uit te voeren.

STAP 4: Door beide leden met eenzelfde getal, verschillend van nul, te vermenigvuldigen of beide leden door eenzelfde getal, verschillend van nul, te delen, zonder je de onbekende af.

Voorbeelden

$$\sqrt{3}x - 9 = 12$$

$$\sqrt{3}x = 12 + 9$$

$$\sqrt{3}x = 21$$

$$x = \frac{21}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{21\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 7\sqrt{3}$$

$$V = \{7\sqrt{3}\}$$

$$2\pi(x + 3) + \pi x = 8\pi$$

$$2\pi x + 6\pi + \pi x = 8\pi$$

$$2\pi x + \pi x = 8\pi - 6\pi$$

$$3\pi x = 2\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{3\pi}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$V = \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

V is de **oplossingenverzameling**. In beide voorbeelden is er 1 oplossing.

2.2 Bijzondere eerstegraadsvergelijkingen

Voorbeelden

$$2\pi(x + 3) + \pi x = 8\pi$$

$$2\pi x + 6\pi + \pi x = 8\pi$$

$$2\pi x + \pi x = 8\pi - 6\pi$$

$$3\pi x = 2\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{3\pi}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

De vergelijking heeft 1 oplossing.

$$V = \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

$$-5x + 3 = -2(3x - 4) + x$$

$$-5x + 3 = -6x + 8 + x$$

$$-5x + 6x - x = 8 - 3$$

$$0x = 5$$

De vergelijking heeft geen oplossingen.

$$V = \{\} \text{ of } V = \emptyset$$

We noemen dit een **strijdige** of **valse** vergelijking.

$$2(x + 5) - (x + 6) = x + 4$$

$$2x + 10 - x - 6 = x + 4$$

$$2x - x - x = 4 - 10 + 6$$

$$0x = 0$$

De vergelijking heeft oneindig veel oplossingen.

$$V = \mathbb{R}$$

We noemen dit een **onbepaalde** of **identieke** vergelijking.



Verwerkingsopdrachten



2,3

2

Los de vergelijking algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

$$3x - 5 = 5x + 7$$

$$\begin{aligned} 3x - 5x &= 7 + 5 \\ -2x &= 12 \\ x &= 12 : (-2) \\ x &= -6 \\ V &= \{-6\} \end{aligned}$$

$$4(2x - 5) - (3 + 2x) = x - 5$$

$$\begin{aligned} 8x - 20 - 3 - 2x &= x - 5 \\ 8x - 2x - x &= -5 + 20 + 3 \\ 5x &= 18 \\ x &= \frac{18}{5} \\ V &= \left\{ \frac{18}{5} \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{3}{4}x - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}x + \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} 12 \cdot \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{2} \right) &= \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{2} \right) \cdot 12 \\ 9x - 18 &= 4x + 30 \\ 9x - 4x &= 30 + 18 \\ 5x &= 48 \\ x &= \frac{48}{5} \\ V &= \left\{ \frac{48}{5} \right\} \end{aligned}$$

3

Los de vergelijking algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

a) $12x - \sqrt{12} = 4x + \sqrt{48}$

$$\begin{aligned} 12x - 4x &= \sqrt{48} + \sqrt{12} \\ 8x &= \sqrt{16 \cdot 3} + \sqrt{4 \cdot 3} \\ x &= \frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{8} \\ x &= \frac{6\sqrt{3}}{8} \\ x &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \\ V &= \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{4} \right\} \end{aligned}$$

c) $3(x - \sqrt{5}) = \sqrt{20}$

$$\begin{aligned} 3x - 3\sqrt{5} &= \sqrt{20} \\ 3x &= \sqrt{20} + 3\sqrt{5} \\ 3x &= 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} \\ 3x &= 5\sqrt{5} \\ x &= \frac{5\sqrt{5}}{3} \\ V &= \left\{ \frac{5\sqrt{5}}{3} \right\} \end{aligned}$$

b) $\sqrt{3}x - \sqrt{48} = \sqrt{12}x$

$$\begin{aligned} \sqrt{3}x - \sqrt{12}x &= \sqrt{48} \\ \sqrt{3}x - \sqrt{4 \cdot 3}x &= \sqrt{16 \cdot 3} \\ \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x &= 4\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}x &= 4\sqrt{3} \\ x &= \frac{4\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} \\ x &= -4 \\ V &= \{-4\} \end{aligned}$$

d) $4\pi r - 2 = 2(6\pi r - 11)$

$$\begin{aligned} 4\pi r - 2 &= 12\pi r - 22 \\ 4\pi r - 12\pi r &= -22 + 2 \\ -8\pi r &= -20 \\ r &= \frac{-20}{-8\pi} \\ r &= \frac{5}{2\pi} \\ V &= \left\{ \frac{5}{2\pi} \right\} \end{aligned}$$

4

Los de vergelijking algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

a) $5m - 2 = 5(m - 1) + 3$

$$\begin{aligned} 5m - 2 &= 5m - 5 + 3 \\ 5m - 5m &= -5 + 3 + 2 \\ 0m &= 0 \\ V &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Deze vergelijking heeft oneindig veel oplossingen.

c) $x - \frac{x}{9} = \frac{8}{9}x - \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} 9 \cdot \left(x - \frac{x}{9}\right) &= \left(\frac{8}{9}x - \frac{1}{3}\right) \cdot 9 \\ 9x - x &= 8x - 3 \\ 8x &= 8x + 3 \\ 8x - 8x &= -3 \\ 0x &= -3 \\ V &= \{\} \end{aligned}$$

Deze vergelijking heeft geen oplossingen.

b) $-2x + 4 = 3(x + 2) - 5x$

$$\begin{aligned} -2x + 4 &= 3x + 6 - 5x \\ -2x - 3x + 5x &= 6 - 4 \\ 0x &= 2 \\ V &= \{\} \end{aligned}$$

Deze vergelijking heeft geen oplossingen.

d) $5x - (2x + 3) = 3x - 3$

$$\begin{aligned} 5x - 2x - 3 &= 3x - 3 \\ 5x - 2x - 3x &= -3 + 3 \\ 0x &= 0 \\ V &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Deze vergelijking heeft oneindig veel oplossingen.

5

Vul aan zodat je de gevraagde oplossing krijgt.

a) $5x + 3 = 5x - 4 \quad V = \{\}$

b) $5x + 3 = 5x - (-3) \quad V = \mathbb{R}$

c) $5x + 3 = 2x - 6 \quad V = \{-3\}$

3 Problemen oplossen met vergelijkingen

Om een vraagstuk op te lossen volg je altijd dezelfde stappen:

- Je probeert het vraagstuk te begrijpen.
- Daarna los je het vraagstuk op met de gekozen oplossingsmethode.
- Je controleert en interpreteert je gevonden oplossing(en).
- Je formuleert een antwoordzin.

Bij vergelijkingen maken we die strategie nog wat concreter. Als je een vraagstuk met behulp van een vergelijking oplost, kun je volgende methode toepassen.

Hoe los je een vraagstuk op met behulp van een vergelijking?

methode

- STAP 1: Stel een onbekende gelijk aan een gekozen letter en schrijf de gegeven verbanden op door gebruik te maken van de letter.
- STAP 2: Stel de vergelijking op en los die op.
- STAP 3: Controleer je gevonden oplossing(en) en interpreteer die. Je kan dit doen met behulp van ICT of door in de vergelijking de onbekende te vervangen door jouw gevonden oplossing.
- STAP 4: Formuleer een antwoord in functie van de context.

Voorbeeld 1

Een getal is $3\sqrt{5}$ groter dan een ander getal. Wanneer je het dubbel van het grootste getal optelt bij het kleinste, verkrijg je $6\sqrt{20}$. Zoek die twee getallen.

Probleem begrijpen: het kleinste getal: x
het grootste getal: $x + 3\sqrt{5}$
het dubbel van het grootste getal: $2(x + 3\sqrt{5})$

Probleem oplossen: het dubbel van het grootste plus het kleinste is $6\sqrt{20}$
 $2(x + 3\sqrt{5}) + x = 6\sqrt{20}$
 $2x + 6\sqrt{5} + x = 12\sqrt{5}$
 $2x + x = 12\sqrt{5} - 6\sqrt{5}$
 $3x = 6\sqrt{5}$
 $x = 2\sqrt{5} \rightarrow$ kleinste getal
Het grootste getal wordt dan $2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

Controle: linkerlid: $2 \cdot (2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}) + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5} + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$ rechterlid: $6\sqrt{20} = 12\sqrt{5}$

Antwoord: Het grootste getal is $5\sqrt{5}$ en het kleinste getal is $2\sqrt{5}$.

Voorbeeld 2

Lloyd en Pieter zijn samen 74 jaar oud. Binnen hoeveel jaar is Pieter dubbel zo oud als Lloyd, als je weet dat Lloyd nu 22 jaar is?

Probleem begrijpen: Binnen x jaar is Pieter dubbel zo oud als Lloyd
Leeftijd Lloyd: 22 Leeftijd Lloyd binnen x jaar: $22 + x$
Leeftijd Pieter: 52 Leeftijd Pieter binnen x jaar: $52 + x$

Probleem oplossen: Twee keer leeftijd Lloyd binnen x jaar is leeftijd Pieter binnen x jaar
 $2(22 + x) = 52 + x$
 $44 + 2x = 52 + x$
 $2x - x = 52 - 44$
 $x = 8$

Controle: Binnen 8 jaar is Lloyd 30 jaar en Pieter 60 jaar.
 $2 \cdot 30 = 60$

Antwoord: Binnen 8 jaar is Pieter dubbel zo oud als Lloyd.



Verwerkingsopdrachten



6

Het vijfvoud van een getal is gelijk aan het drievoud van dat getal vermeerderd met $\sqrt{8}$. Zoek dat reëel getal.

het getal: x

$$5x = 3x + \sqrt{8}$$

$$5x - 3x = \sqrt{8}$$

$$2x = 2\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2}$$

Antwoord: Het reëel getal is $\sqrt{2}$.

7

Een vader is nu 4 keer zo oud als zijn zoon. Zes jaar geleden was hij 7 keer zo oud als zijn zoon. Hoe oud zijn vader en zoon nu?

leeftijd zoon nu: x

leeftijd vader nu: $4x$

$$7 \cdot (x - 6) = 4x - 6$$

$$7x - 42 = 4x - 6$$

$$7x - 4x = -6 + 42$$

$$3x = 36$$

$$x = 36 : 3$$

$$x = 12$$

Antwoord: De vader is nu 48 jaar en zijn zoon 12 jaar.

8

Stef bezit 750 euro en zijn jongere broer 250 euro. Hun spaargeld groeit elke maand met 25 euro. Na hoeveel maanden zal Stef het dubbele bezitten van zijn broer?

aantal maanden: x

$$750 + 25x = (250 + 25x) \cdot 2$$

$$750 + 25x = 500 + 50x$$

$$25x - 50x = 500 - 750$$

$$-25x = -250$$

$$x = -250 : (-25)$$

$$x = 10$$

Antwoord: Na 10 maanden zal Stef het dubbele bezitten van zijn broer.

De ophaalbrug van het kasteel is balkvormig. De lengte van de brug is 4 keer de breedte van de brug. De omtrek van het bovenvlak is $\sqrt{600}$ m.

- a) Bereken met behulp van een vergelijking de afmetingen van het bovenvlak van de brug.
b) Bereken met behulp van een vergelijking 'de dikte' van de brug als de brug een volume inneemt van 40 m^3 .

a) breedte: x
lengte: $4x$
 $p = \sqrt{600} \text{ m}$

$$\begin{aligned} p &= 2 \cdot (l + b) \\ \sqrt{600} &= 2 \cdot (4x + x) \\ \sqrt{6 \cdot 100} &= 2 \cdot 5x \\ 10\sqrt{6} &= 10x \\ \sqrt{6} &= x \end{aligned}$$

Antwoord: Het bovenvlak van de ophaalbrug is $\sqrt{6}$ m breed en $4\sqrt{6}$ m lang.

b) De dikte van de brug: h
 $V = 40 \text{ m}^3$

$$\begin{aligned} V &= l \cdot b \cdot h \\ 40 &= 4\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot h \\ 40 &= 4 \cdot 6 \cdot h \\ 40 &= 24 \cdot h \\ \frac{40}{24} &= h \\ \frac{5}{3} &= h \end{aligned}$$

Antwoord: De 'dikte' van de brug is $\frac{5}{3}$ m.



4 Omvormen van formules

In wetenschappelijke vakken (wiskunde, natuurkunde, economie, ...) worden vaak formules gebruikt. Soms moet je een formule omvormen naar een andere letter om een resultaat te verkrijgen.

Voorbeeld

Een driehoek heeft een basis van $3\sqrt{2}$ cm en een oppervlakte van $9\sqrt{6}$ cm². Bereken de hoogte van de driehoek op 2 decimalen. Je kunt je antwoord vinden op verschillende manieren.

formule: $A = \frac{b \cdot h}{2}$ met A : oppervlakte driehoek, b : basis van de driehoek, h : hoogte van de driehoek.

Methode van het invullen

Stap 1: Vul de gekende waarden in.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad \text{wordt} \quad 9\sqrt{6} = \frac{3\sqrt{2} \cdot h}{2}$$

Stap 2: Los de vergelijking op.

$$\begin{aligned} 9\sqrt{6} &= \frac{3\sqrt{2} \cdot h}{2} \\ 9\sqrt{6} \cdot 2 &= 3\sqrt{2} \cdot h \\ \frac{18\sqrt{16}}{3\sqrt{2}} &= h \\ 6\sqrt{3} &= h \\ 10,39 &\approx h \end{aligned}$$

Methode van het omvormen

Stap 1: Vorm de formule om.

$$\begin{aligned} A &= \frac{b \cdot h}{2} \\ 2A &= b \cdot h \\ \frac{2A}{b} &= h \end{aligned}$$

Stap 2: Vul de gekende waarden in en voer de berekeningen uit.

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 9\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} &= h \\ 2 \cdot 3\sqrt{3} &= h \\ 6\sqrt{3} &= h \\ 10,39 &\approx h \end{aligned}$$

Antwoord: De hoogte van de driehoek is ongeveer 10,39 cm.



Verwerkingsopdracht



10

Vorm de formule om.

formule $F = m \cdot g$ met F : zwaartekracht, m : massa, g : zwaarteveldsterkte

a) Vorm de formule om naar m .

$$\frac{F}{g} = m$$

b) De zwaartekracht die inwerkt op Elias is 671,98 N en de zwaarteveldsterkte is $9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$. Bereken de massa van Elias.

$$\begin{aligned} \frac{F}{g} &= m \\ \frac{671,98}{9,81} &= m \\ 68,5 &\approx m \end{aligned}$$

Antwoord: De massa van Elias is ongeveer 68,5 kg.

5 Ongelijkheden oplossen

5.1 Eigenschappen van de orde in $\mathbb{R}$

Net zoals bij een gelijkheid heb je bij een ongelijkheid een linkerlid en een rechterlid. Bij een ongelijkheid maak je gebruik van “<”, “≤”, “>” of “≥”.

We onderzoeken welke eigenschappen er gelden.

Onderzoek 1: Beschouw de ongelijkheid $-5 < 2$.

$-5 < 2$	$-5 < 2$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$-5 + 10 < 2 + 10$	$-5 - 8 < 2 - 8$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$5 < 12$	$-13 < -6$

Als we bij de beide leden van een ongelijkheid hetzelfde reëel getal optellen (of aftrekken), dan verkrijg je opnieuw een ongelijkheid in dezelfde zin.

eigenschap

IN WOORDEN

De optelling in $\mathbb{R}$ bewaart de orde.

IN SYMBOLEN

$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$

Onderzoek 2: Beschouw de ongelijkheid $-5 < 2$.

$-5 < 2$	$-5 < 2$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$-5 \cdot 3 < 2 \cdot 3$	$-5 : 8 < 2 : 8$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$-15 < 6$	$\frac{-5}{8} < \frac{1}{4}$

Als we beide leden van een ongelijkheid vermenigvuldigen met (of delen door) hetzelfde **strikt positief** reëel getal, dan verkrijg je opnieuw een ongelijkheid in dezelfde zin.

eigenschap

IN WOORDEN

De vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$ met strikt positieve getallen bewaart de orde.

IN SYMBOLEN

$\forall a, b \in \mathbb{R}; \forall c \in \mathbb{R}_0^+ : a \leq b \Leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

Onderzoek 3: Beschouw de ongelijkheid $-5 < 2$.

$-5 < 2$	$-5 < 2$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$-5 \cdot (-3) > 2 \cdot (-3)$	$-5 : (-8) > 2 : (-8)$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$15 > -6$	$\frac{5}{8} > \frac{-1}{4}$

Als we beide leden van een ongelijkheid vermenigvuldigen met (of delen door) hetzelfde **strikt negatief** reëel getal, dan verkrijgt je opnieuw een ongelijkheid in tegengestelde zin.

eigenschap

IN WOORDEN

De vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$ met strikt negatieve getallen keert de orde om.

IN SYMBOLEN

$\forall a, b \in \mathbb{R}; \forall c \in \mathbb{R}_0^- : a \leq b \Leftrightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$

5.2 Ongelijkheden van de eerste graad in één onbekende

Bij de reële getallen leerde je al werken met intervallen en ongelijkheden en deelverzamelingen voorstellen op een getallenas.

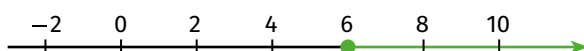
Een voorbeeld van een ongelijkheid van de eerste graad in één onbekend is $5x - 10 \geq 2x + 8$.
De onbekende is x .

Als er gevraagd wordt om de ongelijkheid op te lossen, verwacht men dat je de waarde(n) van x zoekt waarvoor $5x - 10$ groter dan of gelijk is aan $2x + 8$. We vinden snel reële getallen waarvoor deze ongelijkheid waar is, maar we vinden er evenzeer waarvoor dit niet waar is.

- Vul je 12 in de ongelijkheid in, dan klopt de ongelijkheid **wel**, want $50 > 32$.
- Vul je 10 in de ongelijkheid in, dan klopt de ongelijkheid **wel**, want $40 > 28$.
- Vul je 6 in de ongelijkheid in, dan klopt de ongelijkheid **wel**, want $20 = 20$.
- Vul je 0 in de ongelijkheid in, dan klopt de ongelijkheid **niet**, want $-10 < 8$.
- Vul je -2 in de ongelijkheid in, dan klopt de ongelijkheid **niet**, want $-20 < 4$.

De **oplossingenverzameling** is de verzameling van **alle** oplossingen van de ongelijkheid. Deze verzameling bevat alle reële getallen x waarvoor geldt dat $5x - 10 \geq 2x + 8$.

- We kunnen deze oplossingenverzameling voorstellen met een interval, nl. $[6; +\infty[$.
- We kunnen de oplossingenverzameling ook grafisch voorstellen op een getallenas.



- De oplossingenverzameling wordt vaak aangeduid met het symbool V .
- Mogelijke oplossingen van de ongelijkheid $5x - 10 \geq 2x + 8$ zijn 27 , $\frac{20}{3}$, 4π en 6 .

Op de volgende pagina gaan we op zoek naar een algemene algebraïsche oplossingsmethode.

5.3 Ongelijkheden van de eerste graad algebraïsch oplossen

Hoe los je een ongelijkheid op?

methode

STAP 1: Als er haakjes voorkomen, werk je die eerst weg.

STAP 2: Door bij beide leden eenzelfde getal op te tellen of van beide leden eenzelfde getal af te trekken, breng je alle termen waarin de onbekende voorkomt samen in één lid en alle overige termen in het andere lid.

STAP 3: Schrijf beide leden eenvoudiger door de optellingen en/of aftrekkingen uit te voeren.

STAP 4: Zodoende heb je de ongelijkheid herleid tot de vorm $ax < b$, $ax \leq b$, $ax > b$ of $ax \geq b$.

STAP 5: Deel beide leden door a . Als a een strikt negatief getal is, keert de zin van de ongelijkheid om.

Voorbeeld

$$3(x - 2) < 20 - (2 - 7x)$$

$$3x - 6 < 20 - 2 + 7x$$

$$3x - 6 < 18 + 7x$$

$$3x - 7x - 6 < 18$$

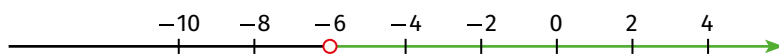
$$3x - 7x < 18 + 6$$

$$-4x < 24$$

$$x > \frac{24}{-4}$$

$$x > -6$$

De oplossingenverzameling is $V =]-6, +\infty[$. Dit kunnen we grafisch voorstellen op een getallenas.



Controle:

- Vervang x door een willekeurig getal uit V , bijvoorbeeld 4.

$$\text{Als } x = 4 \text{ dan (LL) } 3(x - 2) = 3 \cdot (4 - 2) = 3 \cdot 2 = 6$$

$$\text{(RL) } 20 - (2 - 7x) = 20 - (2 - 7 \cdot 4) = 20 - (-26) = 20 + 26 = 46$$

$$LL < RL$$

- Vervang x door een getal dat **niet** tot V behoort, bijvoorbeeld -10 .

$$\text{Als } x = -10 \text{ dan (LL) } 3(x - 2) = 3 \cdot (-10 - 2) = 3 \cdot (-12) = -36$$

$$\text{(RL) } 20 - (2 - 7x) = 20 - (2 - 7 \cdot (-10)) = 20 - (2 + 70) = 20 - 72 = -52$$

$$LL \geq RL$$

5.4 Bijzondere ongelijkheden

Voorbeeld

$$5x - 6 > 5x + 2$$

$$\Updownarrow$$

$$0x > 8$$

$$V = \{\}$$

Dit is een valse ongelijkheid. De ongelijkheid heeft geen oplossingen.

$$-2x + 1 \leq -2(x - 2)$$

$$\Updownarrow$$

$$-2x + 1 \leq -2x + 4$$

$$\Updownarrow$$

$$0x \leq 3$$

$$V = \mathbb{R}$$

Dit is een onbepaalde ongelijkheid. De ongelijkheid heeft oneindig veel oplossingen.



Verwerkingsopdrachten



6, 7, 8

11

Onderzoek telkens of het gegeven reëel getal een oplossing is van de gegeven ongelijkheid.

a) Is $x = 2$ een oplossing van de ongelijkheid $6x \leq 10$?

$$\begin{array}{l} 6 \cdot 2 \stackrel{?}{\leq} 10 \\ 12 > 10 \end{array} \quad \text{Neen, 2 is geen oplossing.}$$

b) Is $x = 4$ een oplossing van de ongelijkheid $\sqrt{3}x < 8$?

$$\begin{array}{l} \sqrt{3} \cdot 4 \stackrel{?}{<} 8 \\ 6,928... < 8 \end{array} \quad \text{Ja, 4 is een oplossing.}$$

c) Is $x = \pi$ een oplossing van de ongelijkheid $2x - 4 > \sqrt{9}$?

$$\begin{array}{l} 2\pi - 4 \stackrel{?}{>} \sqrt{9} \\ 2,283... < 3 \end{array} \quad \text{Neen, } \pi \text{ is geen oplossing.}$$

12

Behoort -3 tot de oplossingenverzameling V van de ongelijkheid $x^2 - 5 < -2x$?

$$\begin{array}{l} (-3)^2 - 5 \stackrel{?}{<} -2 \cdot (-3) \\ 9 - 5 \stackrel{?}{<} 6 \\ 4 < 6 \end{array} \quad \text{Ja, } -3 \text{ is een oplossing.}$$

13

Welke van de volgende uitdrukkingen zijn ongelijkheden van de eerste graad? Omcirkel.

a) $3x^2 - 5x + 12 > 0$

c) $3x - 12 = 9$

e) $5x - 12 \geq 4 - 3x$

b) $5(x + 3) \leq 20$

d) $10 - 6 < 8$

f) $(2x + 4)^3 > 10 - 6x$

14

Vul aan met $\leq$ of $\geq$ zodat je telkens een ware uitspraak krijgt.

a) $\frac{3}{5} \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{5} + \frac{11}{6} \leq -\frac{1}{4} + \frac{11}{6}$

c) $0,4 \leq 1,2 \Rightarrow 0,4 \cdot (-3) \geq 1,2 \cdot (-3)$

b) $\sqrt{8} \leq \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{8} - 4 \leq \sqrt{10} - 4$

d) $-2 \geq 5 \Rightarrow -2\sqrt{3} \geq 5\sqrt{3}$

15

Los de volgende ongelijkheden op naar de onbekende $x \in \mathbb{R}$. Stel de oplossingenverzameling V grafisch voor op een getallenas.

a) $5x - 4 > 11$

$$5x > 11 + 4$$

$$x > \frac{15}{5}$$

$$x > 3$$

$$V =]3; +\infty[$$



b) $-2x \leq 0,8$

$$x \geq \frac{0,8}{-2}$$

$$x \geq -0,4$$

$$V = [-0,4; +\infty[$$



c) $7x + 9 < -2(3 - x)$

$$7x + 9 < -6 + 2x$$

$$7x - 2x < -6 - 9$$

$$5x < -15$$

$$x < \frac{-15}{5}$$

$$x < -3$$

$$V =]-\infty; -3[$$



d) $3 - x \geq 7$

$$-x \geq 7 - 3$$

$$-x \geq 4$$

$$x \leq -4$$

$$V =]-\infty; -4]$$



e) $-x \geq 2$

$$x \leq -2$$

$$V =]-\infty; -2]$$



f) $5x - 12 > 4 - 3x$

$$5x + 3x > 4 + 12$$

$$8x > 16$$

$$x > \frac{16}{8}$$

$$x > 2$$

$$V =]2; +\infty[$$



16

Los de ongelijkheden algebraïsch op.

a) $-4x - 2\sqrt{6} \leq 5(\sqrt{6} - x)$

$$-4x - 2\sqrt{6} \leq 5\sqrt{6} - 5x$$

$$-4x + 5x \leq 5\sqrt{6} + 2\sqrt{6}$$

$$x \leq 7\sqrt{6}$$

$$V =]-\infty, 7\sqrt{6}]$$

b) $-8m + 5 > -4(1 - m) + 4m$

$$-8m + 5 > -4 + 4m + 4m$$

$$-8m + 5 > -4 + 8m$$

$$-8m - 8m > -4 - 5$$

$$-16m > -9$$

$$m < \frac{9}{16}$$

$$V =]-\infty, \frac{9}{16}[$$

c) $-3x - \frac{2}{5} < \frac{2}{5}\left(x + \frac{2}{5}\right)$

$$-3x - \frac{2}{5} < \frac{2}{5}x + \frac{4}{25}$$

$$-75x - 10 < 10x + 4$$

$$-75x - 10x < 4 + 10$$

$$-85x < 14$$

$$x > -\frac{14}{85}$$

$$V =]-\frac{14}{85}, +\infty[$$

d) $4x - \frac{3 - 5x}{2} \geq \frac{13x}{2} - 1$

$$8x - 3 + 5x \geq 13x - 2$$

$$13x - 13x \geq -2 + 3$$

$$0x \geq 1$$

$$V = \{\}$$

Dit is een valse ongelijkheid. De ongelijkheid heeft geen oplossingen.

6 Vraagstukken met ongelijkheden

Bij het oplossen van vraagstukken volgen we deze strategie:

Probleem begrijpen: Voer een nieuwe onbekende x in. Schrijf duidelijk op wat de betekenis van x is.
Stel een ongelijkheid op. Hierbij vertaal je de woorden in het vraagstuk naar formulevorm.

Probleem oplossen: Los de ongelijkheid op.

Controle:

- ① Vervang x door een getal dat tot V behoort en vervolgens door een getal dat niet tot V behoort.
- ② Interpreteer de gevonden uitkomst.
- ③ In sommige vraagstukken kunnen fysische of praktische overwegingen beperkingen opleggen aan de mogelijke waarden van x . De relevante waarden van de onbekende x vormen samen de **referentieverzameling**. Meestal is de referentieverzameling gelijk aan
 - $\mathbb{R}^+$ als x enkel positieve waarden kan aannemen (bv. x is een lengte, oppervlakte, volume, massa, druk, kostprijs, ...)
 - $\mathbb{N}$ als x met zekerheid een natuurlijk getal is (bv. x is een leeftijd, aantal stuks, ...)

Ga na welke reële getallen zowel tot de oplossingenverzameling als tot de referentieverzameling van de ongelijkheid behoren.

Antwoord: Schrijf een antwoordzin.

Voorbeeld

Een suikeroplossing bestaat uit 60 gram suiker en 340 gram water. Hoeveel milliliter water moet ik toevoegen om deze suikeroplossing te verdunnen totdat het hoogstens 8% suiker bevat?

Probleem begrijpen:

x is het aantal milliliter (of gram) water dat ik toevoeg. De concentratie suiker is gelijk aan het aantal gram suiker gedeeld door de totale massa van de oplossing.

$$c_{\text{suiker}} = \frac{m_{\text{suiker}}}{m_{\text{totaal}}} = \frac{m_{\text{suiker}}}{m_{\text{suiker}} + m_{\text{water}}}$$

Laten we gram als massa-eenheid gebruiken.

- De massa suiker in de oplossing blijft constant, nl. 60 gram: $m_{\text{suiker}} = 60$
- De massa water in de oplossing neemt toe als we de oplossing verdunnen: $m_{\text{water}} = 340 + x$
- De oplossing mag hoogstens 8% suiker bevatten, m.a.w. $c_{\text{suiker}} \leq 0,08$

Probleem oplossen: De ongelijkheid die moet opgelost worden is

$$\frac{60}{60 + (340 + x)} \leq 0,08$$

$$\frac{60}{400 + x} \leq 0,08$$

$$60 \leq 0,08(400 + x)$$

$$60 \leq 0,08 \cdot 400 + 0,08x$$

$$60 \leq 32 + 0,08x$$

$$28 \leq 0,08x$$

$$\frac{28}{0,08} \leq x$$

$$350 \leq x$$

$$x \geq 350$$

(De zin van het ongelijkheidsteken keert niet om want $400 + x$ is strikt positief.)



Controle: • Vervang x door een getal dat tot V behoort, bijvoorbeeld 500.

$$\begin{array}{ll} \text{Als } x = 500 \text{ dan} & (LL) \quad \frac{60}{60 + (340 + 500)} = 0,0666... \\ & LL \leq 0,08 \end{array}$$

• Vervang x door een getal dat **niet** tot V behoort, bijvoorbeeld 200.

$$\begin{array}{ll} \text{Als } x = 200 \text{ dan} & (LL) \quad \frac{60}{60 + (340 + 200)} = 0,1 \\ & LL > 0,08 \end{array}$$

• De referentieverzameling is $\mathbb{R}^+$, m.a.w. er worden enkel positieve x -waarden toegelaten.

Antwoord: Je moet minstens 350 milliliter water toevoegen.



Verwerkingsopdrachten



17

Op fuif A moet je 8 euro inkom betalen en 3 euro per consumptie. Op fuif B moet je 20 euro inkom betalen en 1 euro per consumptie. Vanaf hoeveel consumpties is het goedkoper vertoeven op fuif B?

• Welke ongelijkheid moet je oplossen? Wat stelt de onbekende x voor?

De onbekende x is gelijk aan het aantal consumpties.

De ongelijkheid die je moet oplossen is $8 + 3x > 20 + x$.

• Los de ongelijkheid op.

$$\begin{aligned} 3x - x &> 20 - 8 \\ 2x &> 12 \\ x &> \frac{12}{2} \\ x &> 6 \end{aligned}$$

• De oplossingenverzameling van deze ongelijkheid is $V =]6; +\infty[$.

• De referentieverzameling is $\mathbb{N}$.

• Antwoord: Het is goedkoper vertoeven op fuif B als het aantal consumpties meer dan 6 is.

18

Camille koopt een nieuwe iPhone voor 809 euro. Maandelijks betaalt ze 15 euro voor haar gsm-abonnement. Pim koopt in die winkel dezelfde iPhone via een koppelverkoop. Hij moet minstens 12 maanden klant blijven. Hij betaalt dan voor de iPhone slechts 709 euro en maandelijks 20 euro. Na hoeveel maanden valt de keuze voor de koppelverkoop duurder uit?

x : aantal maanden

$$709 + 20x > 809 + 15x$$

$$20x - 15x > 809 - 709$$

$$5x > 100$$

$$x > 20$$

$$V =]20, +\infty[$$

De referentieverzameling is $\mathbb{N}$.

Antwoord: De koppelverkoop valt duurder uit na meer dan 20 maanden.

7 Vergelijkingen en ongelijkheden met één parameter

7.1 Wat is een parameter?

Bekijk aandachtig de onderstaande vergelijkingen.

$$4x = 3$$

$$\frac{-5}{3}x = 3$$

$$\pi x = 3$$

$$\sqrt{5}x = 3$$

De techniek om dit soort vergelijkingen op te lossen is steeds dezelfde: je deelt beide leden door het in blauw aangeduide reëel getal (verschillend van 0).

Bekijk aandachtig de onderstaande vergelijkingen.

$$x + \sqrt{5} = -1$$

$$x + 4 = -1$$

$$x + \frac{-1}{2} = -1$$

$$x + \sqrt{2}x = -1$$

De techniek om dit soort vergelijkingen op te lossen is steeds dezelfde: je telt in beide leden het tegengestelde van het in blauw aangeduid reëel getal op.

We kunnen een letter gebruiken als plaatsvervanger van het in blauw aangeduide getal. We verkrijgen een **parametervergelijking**.

Voorbeelden:

$$ax = 3$$

$$ax + 3 = 2x - 1$$

$$x + b = -1$$

$$4x + b = 3x - 2$$

We kunnen dezelfde redenering toepassen bij ongelijkheden. We spreken dan over **parameterongelijkheden**.

$$mx \leq 12$$

$$3x - 6 \geq 12m$$

$$mx - 2x > m + 5$$

$$(m - 2)x + 4 < 2m - x$$

7.2 Een vergelijking van de eerste graad met één parameter oplossen

Voorbeeld 1

Bespreking van $ax = 3$ met onbekende x en parameter a

Geval 1: $a \neq 0$

$$ax = 3$$

$$x = \frac{3}{a}$$

De vergelijking heeft 1 oplossing.

$$V = \left\{ \frac{3}{a} \right\}$$

Geval 2: $a = 0$

$$ax = 3 \text{ wordt } 0x = 3$$

Dit is een valse vergelijking.

De vergelijking heeft geen oplossingen.

$$V = \{ \}$$

Voorbeeld 2

Bespreking van $x + b = -1$ met onbekende x en parameter b

b mag elk reëel getal zijn, de vergelijking zal altijd een oplossing hebben.

$$x + b = -1$$

$$x = -1 - b$$

De vergelijking heeft 1 oplossing.

$$V = \{-1 - b\}$$

Voorbeeld 3

Bespreking van $ax - 3 = 3(x - 1)$ met onbekende x en parameter a

$$ax - 3 = 3x - 3$$

$$ax - 3x = -3 + 3$$

$$(a - 3)x = 0$$

Geval 1: $a - 3 = 0$

$$a = 3$$

$$(a - 3)x = 0 \text{ wordt}$$

$$0x = 0$$

Elk reëel getal is een oplossing van deze vergelijking.

$$V = \mathbb{R}$$

Geval 2: $a - 3 \neq 0$

$$a \neq 3$$

$$(a - 3)x = 0 \text{ wordt}$$

$$x = \frac{0}{a - 3}$$

$$x = 0$$

Er is 1 oplossing.

$$V = \{0\}$$

7.3 Algemene werkwijze

Als je een vergelijking met een parameter moet bespreken, volg dan de volgende strategie:

De eerste stappen zijn hetzelfde als bij het oplossen van een gewone vergelijking. Hierbij herleid je de vergelijking tot de vorm $ax = b$ (a en b zijn reële getallen).

Geval 1: $a \neq 0$

$$\text{De vergelijking heeft 1 oplossing: } V = \left\{ \frac{b}{a} \right\}$$

Geval 2: $a = 0$ en $b \neq 0$

$$\text{Je hebt dan: } 0x = b$$

$$\text{Dit is een valse vergelijking: } V = \{\}$$

Geval 3: $a = 0$ en $b = 0$

$$\text{Je hebt dan: } 0x = 0$$

$$\text{Dit is een onbepaalde vergelijking: } V = \mathbb{R}$$

7.4 Een ongelijkheid van de eerste graad met één parameter oplossen

Voorbeeld 1

Neem bijvoorbeeld de parameterongelijkheid $(m - 2)x \leq 4$

Voor verschillende waarden van m krijg je een andere ongelijkheid. De oplossingenverzameling van deze ongelijkheid zal veranderen als de waarde van m wijzigt.

We zullen alle mogelijke gevallen moeten exploreren. Dit noemt men de **bespreking van een ongelijkheid** met een parameter.

Er kunnen zich verschillende gevallen voordoen:

Geval 1: $m - 2 > 0$ (m.a.w. $m > 2$)

$$(m - 2)x \leq 4 \implies x \leq \frac{4}{m - 2}$$

Geval 2: $m - 2 < 0$ (m.a.w. $m < 2$)

$$(m - 2)x \leq 4 \implies x \geq \frac{4}{m - 2}$$

Let erop dat de zin van het ongelijkheidsteken omkeert omdat we beide leden door een strikt negatief getal delen.

Geval 3: $m - 2 = 0$ (m.a.w. $m = 2$)

Je mag niet delen door 0. We kennen echter de waarde van m , nl. $m = 2$.

Vul deze waarde in de ongelijkheid in.

$$0 \cdot x \leq 4 \implies 0 \leq 4$$

De parameter valt weg. De uitspraak $0 \leq 4$ is altijd waard, wat de waarde van de onbekende x ook moge zijn. De oplossingenverzameling is dus $\mathbb{R}$.

Voorbeeld 2

We bespreken de ongelijkheid $5 - mx \geq 2(m - 3x)$ met onbekende x en parameter m .

Oplossing: $5 - mx \geq 2(m - 3x)$

$$5 - mx \geq 2m - 6x$$

$$6x - mx \geq 2m - 5$$

$$(6 - m)x \geq 2m - 5$$

We onderscheiden drie gevallen:

Geval 1: $6 - m > 0$ (m.a.w. $m < 6$)

$$x \geq \frac{2m - 5}{6 - m}$$

$$V = \left[\frac{2m - 5}{6 - m}, +\infty \right[$$

Geval 2: $6 - m < 0$ (m.a.w. $m > 6$)

$$x \leq \frac{2m - 5}{6 - m}$$

$$V = \left] -\infty, \frac{2m - 5}{6 - m} \right]$$

Geval 3: $m = 6$

$$0 \cdot x \geq 2 \cdot 6 - 5$$

$$0 \geq 7$$

Dit is een valse ongelijkheid. $V = \emptyset$

7.5 Algemene werkwijze bij ongelijkheden met een parameter

Als je een ongelijkheid met een parameter moet bespreken, volg dan de volgende strategie:

- De eerste drie stappen zijn hetzelfde als bij het oplossen van een gewone ongelijkheid. Hierbij herleid je de ongelijkheid tot de vorm $ax < b$, $ax \leq b$, $ax > b$ of $ax \geq b$.

Deel beide leden door a . Splits op in drie mogelijke gevallen:

Geval 1: $a > 0$

$$ax < b \implies x < \frac{b}{a}$$

De oplossingenverzameling hangt van de waarde van de parameter af.

Geval 2: $a < 0$

$$ax < b \implies x > \frac{b}{a}$$

De oplossingenverzameling hangt van de waarde van de parameter af.

Geval 3: $a = 0$

Dit is een eenvoudig geval. Vul de gekende waarde van de parameter in de ongelijkheid in.

Los deze ongelijkheid zonder parameter op. Bekom je een valse of een identieke ongelijkheid?



Verwerkingsopdrachten



19

Los op en bespreek de volgende vergelijkingen. De parameters a en b stellen reële getallen voor.

a) $3x + a = 5x + 1$

$$3x - 5x = 1 - a$$

$$-2x = 1 - a$$

$$x = \frac{1-a}{-2} \text{ heeft 1 oplossing.}$$

$$V = \left\{ \frac{1-a}{-2} \right\}$$

b) $ax + 8 = 4(x - 1)$

$$ax + 8 = 4x - 4$$

$$ax - 4x = -4 - 8$$

$$(a - 4)x = -12$$

$$x = \frac{-12}{a-4}$$

Geval 1: $a - 4 \neq 0$

$$a \neq 4$$

$$x = \frac{-12}{a-4} \text{ heeft 1 oplossing}$$

$$V = \left\{ \frac{-12}{a-4} \right\}$$

Geval 2: $a - 4 = 0$

$$a = 4$$

$$0x = -12 \text{ heeft geen oplossingen}$$

$$V = \emptyset$$

20

Bespreek de volgende ongelijkheid in $\mathbb{R}$ met onbekende x en parameter m .

$$(m+3)x > 4m - 1$$

Maak een onderscheid tussen de volgende gevallen:

Geval 1: $m+3 > 0$ (m.a.w. $m > -3$)

Geval 2: $m+3 < 0$ (m.a.w. $m < -3$)

Geval 3: $m+3 = 0$ (m.a.w. $m = -3$)

$$\textcircled{1} \quad m+3 > 0$$

$$x > \frac{4m-1}{m+3}$$

$$\textcircled{2} \quad m+3 < 0$$

$$x < \frac{4m-1}{m+3}$$

$$\textcircled{3} \quad m+3 = 0 \rightarrow m = -3$$

$$0x > 4 \cdot (-3) - 1$$

$$0x > -13$$

Dit is altijd waar.

Dit is een identieke ongelijkheid.

$$V = \mathbb{R}$$

21

Welke van de volgende ongelijkheden zijn identieke ongelijkheden? Welke van de volgende ongelijkheden zijn valse ongelijkheden?

a) $9x - 6 < 9x + 15$

$$9x - 9x < 15 + 6$$

$$0x < 21$$

$\rightarrow$ identieke ongelijkheid ($V = \mathbb{R}$)

b) $-4x + 3 \geq 10 - 4x$

$$-4x + 4x \geq 10 - 3$$

$$0x \geq 7$$

$\rightarrow$ valse ongelijkheid ($V = \emptyset$)

c) $5x - 8 \leq 5x - 8$

$$5x - 5x \leq -8 + 8$$

$$0x \leq 0$$

$\rightarrow$ identieke ongelijkheid ($V = \mathbb{R}$)

d) $5x - 8 < 5x - 8$

$$5x - 5x < -8 + 8$$

$$0x < 0$$

$\rightarrow$ valse ongelijkheid ($V = \emptyset$)

e) $3x + 2 - 2x \geq x$

$$3x - 2x - x \geq -2$$

$$0x \geq -2$$

$\rightarrow$ identieke ongelijkheid ($V = \mathbb{R}$)

f) $5x - 3(x+1) > 4x - 2(x+3)$

$$5x - 3x - 3 > 4x - 2x - 6$$

$$5x - 3x - 4x + 2x > -6 + 3$$

$$0x > -3$$

$\rightarrow$ identieke ongelijkheid ($V = \mathbb{R}$)



Computationeel denken

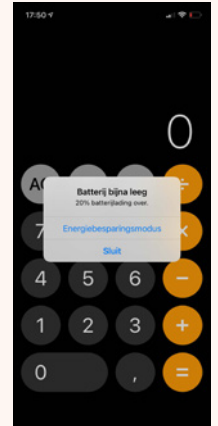
Relationele operatoren

Wout gebruikt zijn rekenmachine op de smartphone om een aantal berekeningen te controleren. Plots krijgt hij een melding. Hij krijgt die melding om dat er in het besturingssysteem een stukje code zit die de gebruiker wil bewust maken van de overgebleven batterijlading. In die code gebruikt men **relationele operatoren**.

Visueel zouden we dat in Scratch zo kunnen begrijpen. We voeren zelf het percentage van de batterijlading in om het te simuleren. Op je smartphone wordt het percentage continu opgeslagen in een variabele (hier te vergelijken met "antwoord").



Hoe moet je de code wijzigen zodat je altijd een aangepaste melding krijgt telkens je een batterijlading intikt die kleiner is dan 20 %?



OPGEPAST Het inspringen is enorm belangrijk in Python. Door het inspringen herkent de programmeertaal "een blokje code".
In andere programmeertalen zoals Swift worden accolades gebruikt.

Bij het tekstueel programmeren in programmeertalen zoals Python of Swift krijg je een gelijkaardige code.

Hieronder plaatsen we eerst even de relationele operatoren die je kan gebruiken.

< kleiner dan	> groter dan	== gelijk aan
<= kleiner dan of gelijk aan	>= groter dan of gelijk aan	!= niet gelijk aan



```

1  batterijlading=int(input("Geef het percentage van de batterijlading in (bv. 33)."))
2  if batterijlading==20:
3      print("Batterij bijna leeg\n20% batterijlading over.")
4

```

Begrijp je de code?

a) Wat is het verschil tussen = en ==?

= is een toekenningoperator, die koppelt een waarde aan een variabele (33 aan batterijlading).

== is een relationele operator, die vergelijkt twee waarden met 'waar' of 'niet waar' als resultaat.

b) Wat betekent \n?

"Begin een nieuwe regel."

c) Krijgt de gebruiker in deze situatie een melding door het programma?

Neen, want de batterijlading is niet gelijk aan 20.

d) Hoe moet je de code wijzigen zodat je altijd een aangepaste melding krijgt telkens je een batterijlading intikt die kleiner is dan 20 %?

2 if lading <= 20:



Signaaloefeningen

1

Welke eigenschap van gelijkheden werd toegepast?

a) $-\sqrt{2}x = \sqrt{6} \Rightarrow -x = \sqrt{3}$

Als je beide leden van een gelijkheid deelt door hetzelfde getal, verschillend van nul, ontstaat opnieuw een gelijkheid.

b) $2x + \sqrt{15} = 3\sqrt{15} \Rightarrow 2x = 2\sqrt{15}$

Als je in beide leden van een gelijkheid hetzelfde getal aftrekt, ontstaat een nieuwe gelijkheid.

>>> Verder oefenen: D1 t.e.m. D3

2

Los de vergelijking algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

a) $\sqrt{45}x + \sqrt{5} = 5\sqrt{5}x$

$$\begin{aligned}\sqrt{45}x - 5\sqrt{5}x &= -\sqrt{5} \\ \sqrt{9 \cdot 5}x - 5\sqrt{5}x &= -\sqrt{5} \\ 3\sqrt{5}x - 5\sqrt{5}x &= -\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5}x &= -\sqrt{5} \\ x &= \frac{-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}} \\ x &= \frac{1}{2} \\ V &= \left\{ \frac{1}{2} \right\}\end{aligned}$$

b) $-2(x - 4\pi) = \frac{1}{2}x - 5\pi$

$$\begin{aligned}-2x + 2 \cdot 4\pi &= \frac{1}{2}x - 5\pi \\ -2x - \frac{1}{2}x &= -5\pi - 8\pi \\ -\frac{5}{2}x &= -13\pi \\ x &= \frac{13\pi \cdot 2}{5} \\ x &= \frac{26\pi}{5} \\ V &= \left\{ \frac{26\pi}{5} \right\}\end{aligned}$$

>>> Verder oefenen: D4 t.e.m. D12

3

Los de vergelijking algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

a) $3x - 5(x - 2) = -2x + 1$

$$\begin{aligned}3x - 5x + 10 &= -2x + 1 \\ -2x + 2x &= 1 - 10 \\ 0x &= -9\end{aligned}$$

$V = \{\}$ Deze vergelijking heeft geen oplossingen.

b) $\frac{\sqrt{8}x + 3}{2} = \sqrt{2}x + 1,5$

$$\begin{aligned}\sqrt{8}x + 3 &= 2\sqrt{2}x + 3 \\ 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}x &= 3 - 3 \\ 0x &= 0\end{aligned}$$

$V = \mathbb{R}$ Deze vergelijking heeft oneindig veel oplossingen.

>>> Verder oefenen: D4 t.e.m. D12

4

Er wordt een rechthoekig stuk van de tuin afgezet om er groenten te kunnen telen. Het stuk heeft een oppervlakte van 9 m^2 .

Bereken de breedte als je weet dat het stuk $(2 + \sqrt{7}) \text{ m}$ lang is.

$$\begin{aligned}
 A &= l \cdot b \\
 9 &= (2 + \sqrt{7}) \cdot b \\
 \frac{9}{2 + \sqrt{7}} &= b \\
 \frac{9(2 - \sqrt{7})}{(2 + \sqrt{7})(2 - \sqrt{7})} &= b \\
 \frac{9(2 - \sqrt{7})}{2^2 - (\sqrt{7})^2} &= b \\
 \frac{9(2 - \sqrt{7})}{4 - 7} &= b \\
 \frac{9(2 - \sqrt{7})}{-3} &= b \\
 -3(2 - \sqrt{7}) &= b \\
 -6 + 3\sqrt{7} &= b
 \end{aligned}$$

Antwoord: De breedte is $(-6 + 3\sqrt{7}) \text{ m}$.



>>> Verder oefenen: D13 t.e.m. D31

5

Vorm de formule om.

formule: $\rho = \frac{m}{V}$ met ρ : massadichtheid, m : massa, V : volume



a) Vorm de formule om naar V .

$$\begin{aligned}
 \rho \cdot V &= m \\
 V &= \frac{m}{\rho}
 \end{aligned}$$

b) Bereken het volume van het voorwerp als je weet dat de massadichtheid $1,26 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ is en de massa $5,04 \text{ g}$ is.

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{m}{\rho} \\
 V &= \frac{5,04 \text{ g}}{1,26 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} \\
 V &= 4 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Antwoord: Het volume van het voorwerp is 4 cm^3 .

>>> Verder oefenen: 32 t.e.m. D38

6

Omcirkel telkens de juiste bewering.

a) Als $4 > x$ dan ☒ A) $x < 4$ B) $x > 4$ C) $x < -4$ D) $x > -4$ b) Als $-x \leq 3$ dan A) $x \leq 3$ B) $x \geq 3$ C) $x \leq -3$ ☒ D) $x \geq -3$ c) Als $-x > -4$ dan ☒ A) $x < 4$ B) $x > 4$ C) $x < -4$ D) $x > -4$ d) Als $-x \geq 2$ dan A) $x \leq 2$ B) $x \geq 2$ ☒ C) $x \leq -2$ D) $x \geq -2$

>>> Verder oefenen: D39 t.e.m. D60

7

Voor welke reële waarden van x is $6x + 3(2 - 4x) \geq 4 - x$? Stel de oplossingenverzameling grafisch voor en noteer als een interval.

$$6x + 6 - 12x \geq 4 - x$$

$$6x - 12x + x \geq 4 - 6$$

$$-5x \geq -2$$

$$x \leq \frac{-2}{-5}$$

$$x \leq \frac{2}{5}$$

$$V = \left] -\infty, \frac{2}{5} \right]$$



>>> Verder oefenen: D39 t.e.m. D60

8

Los de ongelijkheid algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

$$\frac{11x}{2} - 8x - 3 > -\left(x + \frac{6}{5}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{11x}{2} - 8x - 3 &> -x - \frac{6}{5} \\ 55x - 80x - 30 &> -10x - 12 \\ 55x - 80x + 10x &> -12 + 30 \\ -15x &> 18 \\ x &< \frac{18}{-15} \\ x &< -\frac{6}{5} \\ V &= \left] -\infty, -\frac{6}{5} \right[\end{aligned}$$

>>> Verder oefenen: D39 t.e.m. D60

9

Een rechthoek heeft als basis $2x + 4$ en als hoogte 5. Voor welke waarden van x is de oppervlakte van de rechthoek groter of gelijk aan 30?Probleem begrijpen: $(2x + 4) \cdot 5 \geq 30$ Probleem oplossen: $10x + 20 \geq 30$

$$10x \geq 30 - 20$$

$$10x \geq 10$$

$$x \geq \frac{10}{10}$$

$$x \geq 1$$

Controle: • $x = 1$ ($1 \in V$)

$$(2 \cdot 1 + 4) \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30 \quad \text{en} \quad 30 \geq 30$$

• $x = 0,5$ ($0,5 \notin V$)

$$(2 \cdot 0,5 + 4) \cdot 5 = 5 \cdot 5 = 25 \quad \text{en} \quad 25 < 30!$$

• De referentieverzameling is $\mathbb{R}^+$.Antwoord: De oppervlakte van de rechthoek is groter of gelijk aan 30 als x groter of gelijk is aan 1.

>>> Verder oefenen: D61 t.e.m. D73

10

Los de volgende ongelijkheid met parameter m op naar $x \in \mathbb{R}$.

- a) $mx = 3$
 b) $3x + m > 2\pi$
 c) $mx + 12 > m + 4x$

a) $x = \frac{3}{m}$

1e geval: $m = 0$

$0x = 3$ heeft geen oplossingen. $V = \{\}$

2e geval: $m \neq 0$

$x = \frac{3}{m}$ heeft 1 oplossing. $V = \left\{ \frac{3}{m} \right\}$

b) $3x = 2\pi - m$

$x = \frac{2\pi - m}{3}$ heeft 1 oplossing. $V = \left\{ \frac{2\pi - m}{3} \right\}$

c) $mx - 4x > m - 12$

$(m - 4)x > m - 12$

1e geval: $m - 4 > 0$ (m.a.w. $m > 4$)

$x > \frac{m - 12}{m - 4} \quad V = \left] \frac{m - 12}{m - 4}, +\infty \right[$

2e geval: $m - 4 < 0$ (m.a.w. $m < 4$)

$x < \frac{m - 12}{m - 4}$

3e geval: $m - 4 = 0$ (m.a.w. $m = 4$)

$0x > 4 - 12 \quad V = \left] -\infty, \frac{m - 12}{m - 4} \right[$

$0x > -8$

Dit is waar.

Dit is een identieke ongelijkheid.

$V = \mathbb{R}$

>>> Verder oefenen: D74 t.e.m. D91



Differentiatieoefeningen

module p. 32

1

Vul aan met = of $\neq$.

a) $-5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \dots 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$

b) $\frac{\sqrt{48}}{-\sqrt{6}} \dots \frac{-\sqrt{24}}{\sqrt{3}}$

c) $\frac{3}{4} \dots \frac{3\pi}{4\pi}$

a) $-5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \neq 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$

b) $\frac{\sqrt{48}}{-\sqrt{6}} = \frac{-\sqrt{24}}{\sqrt{3}}$

c) $\frac{3}{4} = \frac{3\pi}{4\pi}$

2

Welke eigenschap werd toegepast?

Eigenschap A: Als je in beide leden van een gelijkheid hetzelfde getal optelt, ontstaat opnieuw een gelijkheid.

Eigenschap B: Als je van beide leden van een gelijkheid hetzelfde getal aftrekt, ontstaat opnieuw een gelijkheid.

Eigenschap C: Als je beide leden van een gelijkheid vermenigvuldigt met hetzelfde getal, ontstaat opnieuw een gelijkheid.

Eigenschap D: Als je beide leden van een gelijkheid deelt door hetzelfde getal, verschillend van nul, ontstaat opnieuw een gelijkheid.

a) $x + \sqrt{5} = 3 \Rightarrow x = 3 - \sqrt{5}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{\pi}x = 5 \Rightarrow \sqrt{2}x = 5\pi$

c) $4\sqrt{6} + x = \sqrt{6} \Rightarrow 7\sqrt{6} + x = 4\sqrt{6}$

d) $25\pi x = 10 \Rightarrow 5\pi x = 2$

a) Eigenschap B

b) Eigenschap C

c) Eigenschap A

d) Eigenschap D

3

Formuleer de eigenschap van gelijkheden die werd toegepast.

a) $\sqrt{13} + 4x = \sqrt{3} + 5x \Rightarrow \sqrt{13} - \sqrt{3} = 5x - 4x$

b) $-x + \pi = 4x \Rightarrow \pi = 4x + x$

c) $-\sqrt{2} \cdot (x+2) \Rightarrow x+2 = -2\sqrt{2}$

a) Als je van beide leden van een gelijkheid hetzelfde getal aftrekt, ontstaat opnieuw een gelijkheid.

b) Als je in beide leden van een gelijkheid hetzelfde getal optelt, ontstaat opnieuw een gelijkheid.

c) Als je beide leden van een gelijkheid deelt door hetzelfde getal, verschillend van nul, ontstaat opnieuw een gelijkheid.



4

Los de vergelijking algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

a) $9x - 12 = 0$

d) $3 - p = -21$

g) $-\frac{5}{2}m - 1 = \frac{3}{4}$

b) $\frac{3}{7}y = 15$

e) $1,7 - 0,2x = -0,3$

h) $1,5v + 3 = 9$

c) $-4z = 20$

f) $\frac{7}{5} = -\frac{1}{2}t + 4$

i) $\frac{11}{2}x = \frac{5}{2}$

$$\begin{aligned} \text{a) } 9x - 12 &= 0 \\ 9x &= 12 \\ x &= \frac{12}{9} \\ x &= \frac{4}{3} \\ V &= \left\{ \frac{4}{3} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 3 - p &= -21 \\ -p &= -21 - 3 \\ -p &= -24 \\ p &= 24 \\ V &= \{24\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } -\frac{5}{2}m - 1 &= \frac{3}{4} \\ 4 \cdot \left(-\frac{5}{2}m - 1\right) &= \frac{3}{4} \cdot 4 \\ -10m - 4 &= 3 \\ -10m &= 3 + 4 \\ -10m &= 7 \\ m &= \frac{-7}{10} \\ V &= \left\{ \frac{-7}{10} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{3}{7}y &= 15 \\ y &= 15 : \frac{3}{7} \\ y &= 15 \cdot \frac{7}{3} \\ y &= 35 \\ V &= \{35\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } 1,7 - 0,2x &= -0,3 \\ -0,2x &= -0,3 - 1,7 \\ -0,2x &= -2 \\ x &= -2 : (-0,2) \\ x &= 10 \\ V &= \{10\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } 1,5v + 3 &= 9 \\ 1,5v &= 9 - 3 \\ 1,5v &= 6 \\ v &= 6 : 1,5 \\ v &= 4 \\ V &= \{4\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } -4z &= 20 \\ z &= 20 : (-4) \\ z &= -5 \\ V &= \{-5\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \frac{7}{5} &= -\frac{1}{2}t + 4 \\ 10 \cdot \frac{7}{5} &= \left(-\frac{1}{2}t + 4\right) \cdot 10 \\ 14 &= -5t + 40 \\ 14 - 40 &= -5t \\ -26 &= -5t \\ \frac{26}{5} &= t \\ V &= \left\{ \frac{26}{5} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \frac{11}{2}x &= \frac{5}{2} \\ x &= \frac{5}{2} : \frac{11}{2} \\ x &= \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{11} \\ x &= \frac{5}{11} \\ V &= \left\{ \frac{5}{11} \right\} \end{aligned}$$

5

Los de vergelijking op in $\mathbb{R}$.

a) $x + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

c) $\sqrt{3}x = -\sqrt{15}$

e) $-5\sqrt{7} = x - 3\sqrt{7}$

b) $2\pi x = 10$

d) $2x - \sqrt{2} = 0$

f) $4x - 9\sqrt{5} = -\sqrt{5}$

$$\begin{aligned} \text{a) } x + \sqrt{5} &= 3\sqrt{5} \\ x &= 3\sqrt{5} - \sqrt{5} \\ x &= 2\sqrt{5} \\ V &= \{2\sqrt{5}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sqrt{3}x &= -\sqrt{15} \\ x &= -\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} \\ x &= -\sqrt{\frac{15}{3}} \\ x &= -\sqrt{5} \\ V &= \{-\sqrt{5}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } -5\sqrt{7} &= x - 3\sqrt{7} \\ -5\sqrt{7} + 3\sqrt{7} &= x \\ -2\sqrt{7} &= x \\ V &= \{-2\sqrt{7}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2\pi x &= 10 \\ x &= \frac{10}{2\pi} \\ x &= \frac{5}{\pi} \\ V &= \left\{\frac{5}{\pi}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 2x - \sqrt{2} &= 0 \\ 2x &= \sqrt{2} \\ x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ V &= \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } 4x - 9\sqrt{5} &= x - 3\sqrt{5} \\ 4x &= -\sqrt{5} + 9\sqrt{5} \\ 4x &= 8\sqrt{5} \\ x &= \frac{8\sqrt{5}}{4} \\ x &= 2\sqrt{5} \\ V &= \{2\sqrt{5}\} \end{aligned}$$



6

Los de vergelijking algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

a) $5(x - 2) = 19$

d) $\frac{5}{3}\left(6x - \frac{9}{4}\right) = \frac{6}{5}x + 1$

g) $\frac{5 - 2r}{3} = 11 + 4r$

b) $4z - 7 = 2z - 3$

e) $\frac{3}{2}x - \frac{9}{8} = \frac{1}{4} - x$

h) $\frac{m}{5} - 3 = \frac{m}{2} - 1$

c) $-8\left(3x - \frac{5}{2}\right) = 14x$

f) $0,5y - 4 = 0,25y + 6$

i) $\frac{9k}{5} = 2 - \frac{3k}{4}$

$$\begin{aligned} \text{a) } 5(x - 2) &= 19 \\ 5x - 10 &= 19 \\ 5x &= 19 + 10 \\ 5x &= 29 \\ x &= \frac{29}{5} \\ V &= \left\{\frac{29}{5}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{5}{3}\left(6x - \frac{9}{4}\right) &= \frac{6}{5}x + 1 \\ 10x - \frac{15}{4} &= \frac{6}{5}x + 1 \\ 20 \cdot \left(10x - \frac{15}{4}\right) &= \left(\frac{6}{5}x + 1\right) \cdot 20 \\ 200x - 75 &= 24x + 20 \\ 200x - 24x &= 20 + 75 \\ 176x &= 95 \\ x &= \frac{95}{176} \\ V &= \left\{\frac{95}{176}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \frac{5 - 2r}{3} &= 11 + 4r \\ 5 - 2r &= (11 + 4r) \cdot 3 \\ 5 - 2r &= 33 + 12r \\ -2r - 12r &= 33 - 5 \\ -14r &= 28 \\ r &= 28 : (-14) \\ r &= -2 \\ V &= \{-2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 4z - 7 &= 2z - 3 \\ 4z - 2z &= -3 + 7 \\ 2z &= 4 \\ z &= 2 \\ V &= \{2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \frac{3}{2}x - \frac{9}{8} &= \frac{1}{4} - x \\ 8 \cdot \left(\frac{3}{2}x - \frac{9}{8}\right) &= \left(\frac{1}{4} - x\right) \cdot 8 \\ 12x - 9 &= 2 - 8x \\ 12x + 8x &= 2 + 9 \\ 20x &= 11 \\ x &= \frac{11}{20} \\ V &= \left\{\frac{11}{20}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \frac{m}{5} - 3 &= \frac{m}{2} - 1 \\ 10 \cdot \left(\frac{m}{5} - 3\right) &= \left(\frac{m}{2} - 1\right) \cdot 10 \\ 2m - 30 &= 5m - 10 \\ 2m - 5m &= -10 + 30 \\ -3m &= 20 \\ m &= -\frac{20}{3} \\ V &= \left\{-\frac{20}{3}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } -8\left(3x - \frac{5}{2}\right) &= 14x \\ -24 + 20 &= 14x \\ -24x - 14x &= -20 \\ -38x &= -20 \\ x &= \frac{10}{19} \\ V &= \left\{\frac{10}{19}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } 0,5y - 4 &= 0,25y + 6 \\ 0,5y - 0,25y &= 6 + 4 \\ 0,25y &= 10 \\ y &= 10 : 0,25 \\ y &= 40 \\ V &= \{40\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \frac{9k}{5} &= 2 - \frac{3k}{4} \\ 20 \cdot \left(\frac{9k}{5}\right) &= \left(2 - \frac{3k}{4}\right) \cdot 20 \\ 36k &= 40 - 15k \\ 36k + 15k &= 40 \\ 51k &= 40 \\ k &= \frac{40}{51} \\ V &= \left\{\frac{40}{51}\right\} \end{aligned}$$

7

Los de vergelijking algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

$$\text{a) } 2x + (6 - 5x) - 2(3x + 4) = 0$$

$$\text{b) } 4(3x - 5) - 3(x + 6) = 6x - 25$$

$$\text{c) } \frac{-4(x-1)}{3} = 3$$

$$\text{d) } x + \frac{3}{2}(x-2) = \frac{4}{3} - 2\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

$$\text{e) } 2,25x + 3(1,5x - 0,05) = 1,75$$

$$\text{f) } -2(-2x + 7) = 3(x - 4)$$

$$\text{g) } \frac{5}{7}x + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - 2x$$

$$\text{h) } \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 1\right) - \frac{1}{2}x - 3 = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x + (6 - 5x) - 2(3x + 4) &= 0 \\ 2x + 6 - 5x - 6x - 8 &= 0 \\ 2x - 5x - 6x &= -6 + 8 \\ -9x &= 2 \\ x &= -\frac{2}{9} \\ V &= \left\{-\frac{2}{9}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 4(3x - 5) - 3(x + 6) &= 6x - 25 \\ 12x - 30 - 3x - 18 &= 6x - 25 \\ 12x - 3x - 6x &= -25 + 20 + 18 \\ 3x &= 13 \\ 3 &= \frac{13}{3} \\ V &= \left\{\frac{13}{3}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{-4(x-1)}{3} &= 3 \\ 3 \cdot \left(\frac{-4x+4}{3}\right) &= 3 \cdot 3 \\ -4x + 4 &= 9 \\ -4x &= 9 - 4 \\ -4x &= 5 \\ x &= -\frac{5}{4} \\ V &= \left\{-\frac{5}{4}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } 2,25x + 3(1,5x - 0,05) &= 1,75 \\ 2,25x + 4,5x - 0,15 &= 1,75 \\ 2,25x + 4,5x &= 1,75 + 0,15 \\ 6,75x &= 1,9 \\ x &= 1,9 : 6,75 \\ x &= \frac{38}{135} \\ V &= \left\{\frac{38}{135}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } -2(-2x + 7) &= 3(x - 4) \\ 4x - 14 &= 3x - 12 \\ 4x - 3x &= -12 + 14 \\ x &= 2 \\ V &= \{2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \frac{5}{7}x + \frac{2}{3} &= \frac{1}{2} - 2x \\ 42 \cdot \left(\frac{5}{7}x + \frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{1}{2} - 2x\right) \cdot 42 \\ 30x + 28 &= 21 - 84x \\ 30x + 84x &= 21 - 28 \\ 114x &= -7 \\ x &= -\frac{7}{114} \\ V &= \left\{-\frac{7}{114}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } x + \frac{3}{2}(x-2) &= \frac{4}{3} - 2\left(x - \frac{5}{2}\right) \\
 6 \cdot \left(x + \frac{3}{2}x - 3\right) &= \left(\frac{4}{3} - 2x + 5\right) \cdot 6 \\
 6x + 9x - 18 &= 8 - 12x + 30 \\
 6x + 9x + 12x &= 8 + 30 + 18 \\
 27x &= 56 \\
 x &= \frac{56}{27} \\
 V &= \left\{\frac{56}{27}\right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h) } \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 1\right) - \frac{1}{2}x - 3 &= \frac{3}{4} \\
 12 \cdot \left(\frac{x}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x - 3\right) &= \left(\frac{3}{4}\right) \cdot 12 \\
 2x - 4 - 6x - 36 &= 9 \\
 2x - 6x &= 9 + 4 + 36 \\
 -4x &= 49 \\
 x &= -\frac{49}{4} \\
 V &= \left\{-\frac{49}{4}\right\}
 \end{aligned}$$



8

Los de vergelijking algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

$$\text{a) } -\sqrt{3}x - 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$$

$$\text{d) } -\sqrt{3}x + \sqrt{21} = -\sqrt{21}$$

$$\text{g) } -5\sqrt{10}x + \sqrt{5} = \sqrt{45}$$

$$\text{b) } 2(4\pi x - 3) = 9\pi x + 2$$

$$\text{e) } \sqrt{11}(\sqrt{11}x - 3) = \sqrt{44}$$

$$\text{h) } \sqrt{3}(4 - 2\sqrt{5}x) = 3\sqrt{15} - \sqrt{3}$$

$$\text{c) } -\sqrt{2}x - \sqrt{12} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{2}x$$

$$\text{f) } 2(x - \sqrt{2}) = \sqrt{8}$$

$$\text{i) } 15x - 5\sqrt{7} = 12x - 8\sqrt{7}$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } -\sqrt{3}x - 2\sqrt{6} &= \sqrt{6} \\
 -3\sqrt{3}x &= \sqrt{6} + 2\sqrt{6} \\
 -\sqrt{3}x &= 3\sqrt{6} \\
 x &= \frac{3\sqrt{6}}{-\sqrt{3}} \\
 x &= \frac{-3\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\
 x &= -3\sqrt{2} \\
 V &= \{-3\sqrt{2}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } 2(x - \sqrt{2}) &= \sqrt{8} \\
 2x - 2\sqrt{2} &= \sqrt{8} \\
 2x &= \sqrt{2 \cdot 4} + 2\sqrt{2} \\
 x &= \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \\
 x &= \frac{4\sqrt{2}}{2} \\
 x &= 2\sqrt{2} \\
 V &= \{2\sqrt{2}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } 2(4\pi x - 3) &= 9\pi x + 2 \\
 8\pi x - 6 &= 9\pi x + 2 \\
 8\pi x - 9\pi x &= 2 + 6 \\
 -\pi x &= 8 \\
 x &= \frac{-8}{\pi} \\
 V &= \left\{\frac{-8}{\pi}\right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g) } -5\sqrt{10}x + \sqrt{5} &= \sqrt{45} \\
 -5\sqrt{10}x &= \sqrt{45} - \sqrt{5} \\
 x &= \frac{\sqrt{9 \cdot 5} - \sqrt{5}}{-5\sqrt{10}} \\
 x &= \frac{3\sqrt{5} - \sqrt{5}}{-5\sqrt{5}\sqrt{2}} \\
 x &= \frac{2\sqrt{5}}{-5\sqrt{5}\sqrt{2}} \\
 x &= \frac{2\sqrt{2}}{-5\sqrt{2}\sqrt{2}} \\
 x &= \frac{2\sqrt{2}}{-5 \cdot 2} \\
 x &= \frac{-\sqrt{2}}{5} \\
 V &= \left\{\frac{-\sqrt{2}}{5}\right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } -\sqrt{2}x - \sqrt{12} &= 4\sqrt{3} - 2\sqrt{2}x \\
 -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}x &= 4\sqrt{3} + \sqrt{12} \\
 \sqrt{2}x &= 4\sqrt{3} + \sqrt{4 \cdot 3} \\
 \sqrt{2}x &= 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\
 \sqrt{2}x &= 6\sqrt{3} \\
 x &= \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\
 x &= \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \\
 x &= \frac{6\sqrt{6}}{2} \\
 x &= 3\sqrt{6} \\
 V &= \{3\sqrt{6}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } -\sqrt{3}x + \sqrt{21} &= -\sqrt{21} \\
 -\sqrt{3}x &= -\sqrt{21} - \sqrt{21} \\
 -\sqrt{3}x &= -2\sqrt{21} \\
 x &= \frac{-2\sqrt{21}}{-\sqrt{3}} \\
 x &= \frac{-2\sqrt{3}\sqrt{7}}{-\sqrt{3}} \\
 x &= 2\sqrt{7} \\
 V &= \{2\sqrt{7}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \sqrt{11}(\sqrt{11}x - 3) &= \sqrt{44} \\
 \sqrt{11}\sqrt{11}x - 3\sqrt{11} &= \sqrt{44} \\
 11x &= \frac{\sqrt{4 \cdot 11} + 3\sqrt{11}}{11} \\
 x &= \frac{2\sqrt{11} + 3\sqrt{11}}{11} \\
 x &= \frac{5\sqrt{11}}{11} \\
 V &= \left\{ \frac{5\sqrt{11}}{11} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h) } \sqrt{3}(4 - 2\sqrt{5}x) &= 3\sqrt{15} - \sqrt{3} \\
 4\sqrt{3} - 2\sqrt{5}\sqrt{3}x &= 3\sqrt{15} - \sqrt{3} \\
 4\sqrt{3} - 2\sqrt{15}x &= 3\sqrt{15} - \sqrt{3} \\
 -2\sqrt{15}x &= 3\sqrt{15} - \sqrt{3} - 4\sqrt{3} \\
 -2\sqrt{15}x &= 3\sqrt{15} - 5\sqrt{3} \\
 x &= \frac{3\sqrt{15} - 5\sqrt{3}}{-2\sqrt{15}} \\
 x &= \frac{-3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{5}\sqrt{3}} \\
 x &= \frac{-3}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} \\
 x &= \frac{-3}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{2 \cdot 5} \\
 x &= \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\
 x &= \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \\
 V &= \left\{ \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{i) } 15x - 5\sqrt{7} &= 12x - 8\sqrt{7} \\
 15x - 12x &= -8\sqrt{7} + 5\sqrt{7} \\
 3x &= -3\sqrt{7} \\
 x &= -\sqrt{7} \\
 V &= \{-\sqrt{7}\}
 \end{aligned}$$



9

Heeft de vergelijking 1 oplossing, oneindig veel oplossingen of geen oplossingen?

$$\text{a) } 3(1 - 2x) = -6x + 1$$

$$\text{b) } 4x - 1 = 2(x - 0,5) + 2x$$

$$\text{c) } \frac{x-4}{2} = -2 - \frac{6x}{2}$$

$$\text{d) } \frac{10\pi d - 20}{5} = -2(4 - \pi d)$$

$$\text{e) } 6\pi - x = 3x - 4\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\text{f) } 4x - \frac{3-5x}{2} = \frac{13x}{2} - 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } 3(1 - 2x) &= -6x + 1 \\
 3 - 6x &= -6x + 1 \\
 -6x + 6x &= 1 - 2 \\
 0x &= -1 \\
 V &= \{\}
 \end{aligned}$$

Deze vergelijking heeft geen oplossingen.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } 4x - 1 &= 2(x - 0,5) + 2x \\
 4x - 1 &= 2x - 1 + 2x \\
 4x - 1 &= 4x - 1 \\
 4x - 4x &= -1 + 1 \\
 0x &= 0 \\
 V &= \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Deze vergelijking heeft oneindig veel oplossingen.

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \frac{10\pi d - 20}{5} &= -2(4 - \pi d) \\
 2\pi d - 4 &= -8 + 2\pi d \\
 2\pi d - 2\pi d &= -8 + 4 \\
 0d &= -4 \\
 V &= \{\}
 \end{aligned}$$

Deze vergelijking heeft geen oplossingen.

$$\begin{aligned}
 \text{e) } 6\pi - x &= 3x - 4\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \\
 6\pi - x &= 3x - 4x + 6\pi \\
 -x - 3x + 4x &= 6\pi - 6\pi \\
 0x &= 0 \\
 V &= \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Deze vergelijking heeft oneindig veel oplossingen.

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{x-4}{2} &= -2 - \frac{6x}{2} \\ 2 \cdot \left(\frac{x-4}{2} \right) &= \left(-2 - \frac{6x}{2} \right) \cdot 2 \\ x-4 &= -4-6x \\ x+6x &= -4+4 \\ 7x &= 0 \\ x &= 0 \\ V &= \{0\} \end{aligned}$$

Deze vergelijking heeft 1 oplossing.

$$\begin{aligned} \text{f) } 4x - \frac{3-5x}{2} &= \frac{13x}{2} - 1 \\ 2 \cdot \left(4x - \frac{3-5x}{2} \right) &= \left(\frac{13x}{2} - 1 \right) \cdot 2 \\ 8x - 3 + 5x &= 13x - 2 \\ 8x + 5x - 13x &= -2 + 3 \\ 0x &= 1 \\ V &= \{ \} \end{aligned}$$

Deze vergelijking heeft geen oplossingen.



10

Los algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{a) } 3x - \frac{x-5}{4} &= \frac{5x-10}{4} \\ \text{b) } \frac{x-4}{5} - \frac{10-x}{2} &= \frac{5x-12}{3} - 1 \\ \text{c) } \frac{x}{2} + \frac{x-2}{3} &= 5 - \frac{x+1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{x-\sqrt{6}}{3} - \frac{x+\sqrt{2}}{9} &= x - \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \text{e) } x - \frac{2}{5}(x-3) &= \frac{4}{3} - 2\left(x + \frac{2}{3}\right) \\ \text{f) } \frac{-5(x-1)}{6} - \frac{3(1-2x)}{7} &= 2x + \frac{x+1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } 3x - \frac{x-5}{4} &= \frac{5x-10}{4} \\ 4 \cdot \left(3x - \frac{x-5}{4} \right) &= \left(\frac{5x-10}{4} \right) \cdot 4 \\ 12x - 4 + 5 &= 5x - 10 \\ 12x - x - 5x &= -10 - 5 \\ 6x &= -15 \\ x &= -\frac{15}{6} \\ x &= -\frac{5}{2} \\ V &= \left\{ -\frac{5}{2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x-4}{5} - \frac{10-x}{2} &= \frac{5x-12}{3} - 1 \\ 30 \cdot \left(\frac{x-4}{5} - \frac{10-x}{2} \right) &= \left(\frac{5x-12}{3} - 1 \right) \cdot 30 \\ 6(x-4) - 15(10-x) &= 10(5x-12) - 30 \\ 6x - 24 - 150 + 15x &= 50x - 120 - 30 \\ 6x + 15x - 50x &= -120 - 30 + 24 + 150 \\ -29x &= 24 \\ x &= -\frac{24}{29} \\ V &= \left\{ -\frac{24}{29} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{x-\sqrt{6}}{3} - \frac{x+\sqrt{2}}{9} &= x - \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 9 \cdot \left(\frac{x-\sqrt{6}}{3} - \frac{x+\sqrt{2}}{9} \right) &= \left(x - \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \cdot 9 \\ 3(x-\sqrt{6}) - x - \sqrt{2} &= 9x - 3\sqrt{6} \\ 3x - 3\sqrt{6} - x - \sqrt{2} &= 9x - 3\sqrt{6} \\ 3x - x - 9x &= -3\sqrt{6} + 3\sqrt{6} + \sqrt{2} \\ -7x &= \sqrt{2} \\ x &= -\frac{\sqrt{2}}{7} \\ V &= \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{7} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x - \frac{2}{5}(x-3) &= \frac{4}{3} - 2\left(x + \frac{2}{3}\right) \\ x - \frac{2}{5}(x-3) &= \frac{4}{3} - 2\left(x + \frac{2}{3}\right) \\ 15 \cdot \left(x - \frac{2}{5}x + \frac{6}{5} \right) &= \left(\frac{4}{3} - 2x - \frac{4}{3} \right) \cdot 15 \\ 15x - 6x + 18 &= 20 - 30x - 20 \\ 15x - 6x + 30x &= 20 - 20 - 18 \\ 39x &= -18 \\ x &= -\frac{18}{39} \\ x &= -\frac{6}{13} \\ V &= \left\{ -\frac{6}{13} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & \frac{x}{2} + \frac{x-2}{3} = 5 - \frac{x+1}{2} \\
 & 6 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{x-2}{3} \right) = \left(5 - \frac{x+1}{2} \right) \cdot 6 \\
 & 3x + 2(x-2) = 30 - 3(x+1) \\
 & 3x + 2x - 4 = 30 - 3x - 3 \\
 & 3x + 2x + 3x = 30 - 3 + 4 \\
 & 8x = 31 \\
 & x = \frac{31}{8} \\
 & V = \left\{ \frac{31}{8} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f)} \quad & \frac{-5(x-1)}{6} - \frac{3(1-2x)}{7} = 2x + \frac{x+1}{6} \\
 & 42 \cdot \left(\frac{-5x+5}{6} - \frac{3-6x}{7} \right) = \left(2x + \frac{x+1}{6} \right) \cdot 42 \\
 & 7(-5x+5) - 6(3-6x) = 84x + 7(x+1) \\
 & -35x + 35 - 18 + 36x = 84x + 7x + 7 \\
 & -35x + 36x - 84x - 7x = 7 - 35 + 18 \\
 & -90x = -10 \\
 & x = \frac{-10}{-90} \\
 & x = \frac{1}{9} \\
 & V = \left\{ \frac{1}{9} \right\}
 \end{aligned}$$



$$a) \frac{3x + \sqrt{8}}{2} = \frac{3x - \sqrt{2}}{3}$$

$$b) \frac{x - 3\sqrt{5}}{3} - \frac{x - 7\sqrt{5}}{5} = \frac{x}{15}$$

$$c) 3(x - 2\pi) = \frac{4x - 8\pi}{3}$$

$$d) 3\pi x - \left(\pi x - \frac{3}{2}\right) = \frac{6\pi x - 7}{2}$$

$$e) \frac{3x - \sqrt{6}}{2} - \frac{x - \sqrt{54}}{3} = \frac{-2x - 5\sqrt{6}}{4}$$

$$f) \frac{\sqrt{10} - x}{\sqrt{5}} = \frac{3x - \sqrt{5}}{\sqrt{125}}$$

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{3x + \sqrt{8}}{2} &= \frac{3x - \sqrt{2}}{3} \\ 3(3x + \sqrt{8}) &= 2(3x - \sqrt{2}) \\ 9x + 3\sqrt{8} &= 6x - 2\sqrt{2} \\ 9x - 6x &= -2\sqrt{2} - 3\sqrt{8} \\ 3x &= -2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \\ 3x &= -8\sqrt{2} \\ x &= \frac{-8}{3}\sqrt{2} \\ V &= \left\{\frac{-8}{3}\sqrt{2}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \frac{x - 3\sqrt{5}}{3} - \frac{x - 7\sqrt{5}}{5} &= \frac{x}{15} \\ 5(x - 3\sqrt{5}) - 3(x - 7\sqrt{5}) &= x \\ 5x - 5 \cdot 3\sqrt{5} - 3x + 3 \cdot 7\sqrt{5} &= x \\ 5x - 15\sqrt{5} - 3x + 21\sqrt{5} &= x \\ 5x - 3x - x &= 15\sqrt{5} - 21\sqrt{5} \\ x &= -6\sqrt{5} \\ V &= \{-6\sqrt{5}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad 3(x - 2\pi) &= \frac{4x - 8\pi}{3} \\ 9(x - 2\pi) &= 4x - 8\pi \\ 9x - 18\pi &= 4x - 8\pi \\ 9x - 4x &= -8\pi + 18\pi \\ 5x &= 10\pi \\ x &= \frac{10\pi}{5} \\ x &= 2\pi \\ V &= \{2\pi\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad 3\pi x - \left(\pi x - \frac{3}{2}\right) &= \frac{6\pi x - 7}{2} \\ 3\pi x - \pi x + \frac{3}{2} &= 3\pi x - \frac{7}{2} \\ 3\pi x - \pi x - 3\pi x &= -\frac{7}{2} - \frac{3}{2} \\ -\pi x &= -\frac{10}{2} \\ -\pi x &= -5 \\ x &= \frac{5}{\pi} \\ V &= \left\{\frac{5}{\pi}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \quad \frac{3x - \sqrt{6}}{2} - \frac{x - \sqrt{54}}{3} &= \frac{-2x - 5\sqrt{6}}{4} \\ 6(3x - \sqrt{6}) - 4(x - \sqrt{54}) &= 3(-2x - 5\sqrt{6}) \\ 18x - 6\sqrt{6} - 4x + 4\sqrt{54} &= -6x - 15\sqrt{6} \\ 18x - 4x + 6x &= -15\sqrt{6} + 6\sqrt{6} - 4\sqrt{54} \\ 20x &= -9\sqrt{6} - 4\sqrt{9 \cdot 6} \\ 20x &= -9\sqrt{6} - 4 \cdot 3\sqrt{6} \\ 20x &= -9\sqrt{6} - 12\sqrt{6} \\ 20x &= -21\sqrt{6} \\ x &= \frac{-21}{20}\sqrt{6} \\ V &= \left\{\frac{-21}{20}\sqrt{6}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f) \quad \frac{\sqrt{10} - x}{\sqrt{5}} &= \frac{3x - \sqrt{5}}{\sqrt{125}} \\ \sqrt{125}(\sqrt{10} - x) &= \sqrt{5}(3x - \sqrt{5}) \\ 5\sqrt{5}(\sqrt{10} - x) &= 3\sqrt{5}x - 5 \\ 5\sqrt{5}\sqrt{10} - 5\sqrt{5}x &= 3\sqrt{5}x - 5 \\ 5\sqrt{50} - 5\sqrt{5}x &= 3\sqrt{5}x - 5 \\ 25\sqrt{2} - 5\sqrt{5}x &= 3\sqrt{5}x - 5 \\ -8\sqrt{5}x &= -5 - 25\sqrt{2} \\ x &= \frac{5 + 25\sqrt{2}}{8\sqrt{5}} \\ x &= \frac{(5 + 25\sqrt{2})\sqrt{5}}{8\sqrt{5}\sqrt{5}} \\ x &= \frac{\cancel{5}\sqrt{5} + \cancel{25}\sqrt{10}}{\cancel{8}\sqrt{5}\sqrt{5}} \\ x &= \frac{\sqrt{5} + 5\sqrt{10}}{8} \\ V &= \left\{\frac{\sqrt{5} + 5\sqrt{10}}{8}\right\} \end{aligned}$$



$$\text{a) } (x+2)^2 = x(2x+5) - (x-3)(x+3)$$

$$\text{b) } (x+\sqrt{6})^2 - (x-\sqrt{6})^2 = 1$$

$$\text{c) } \left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(x-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(x-\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\text{a) } (x+2)^2 = x(2x+5) - (x-3)(x+3)$$

$$x^2 + 4x + 4 = 2x^2 + 5x - (x^2 - 9)$$

$$x^2 + 4x + 4 = 2x^2 + 5x - x^2 + 9$$

$$x^2 + 4x - 2x^2 - 5x + x^2 = 9 - 4$$

$$-x = 5$$

$$x = -5$$

$$V = \{-5\}$$

$$\text{b) } (x+\sqrt{6})^2 - (x-\sqrt{6})^2 = 1$$

$$x^2 + 2\sqrt{6}x + 6 - (x^2 - 2\sqrt{6}x + 6) = 1$$

$$x^2 + 2\sqrt{6}x + 6 - x^2 + 2\sqrt{6}x - 6 = 1$$

$$x^2 + 2\sqrt{6}x - x^2 + 2\sqrt{6}x = 1 - 6 + 6$$

$$4\sqrt{6}x = 1$$

$$x = \frac{1}{4\sqrt{6}}$$

$$x = \frac{\sqrt{6}}{24}$$

$$V = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{24} \right\}$$

$$\text{c) } \left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(x-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(x-\frac{3}{4}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = x^2 - x + \frac{1}{4} + x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$$

$$\cancel{x^2} + \frac{2}{3}\cancel{x} + \cancel{x^2} - \frac{2}{3}\cancel{x} - \cancel{x^2} + x - \cancel{x^2} + \frac{3}{2}\cancel{x} = \frac{1}{4} + \frac{9}{16} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9}$$

$$\frac{5}{2}x = \frac{36}{144} + \frac{81}{144} - \frac{16}{144} - \frac{16}{144}$$

$$\frac{5}{2}x = \frac{85}{144}$$

$$x = \frac{85}{144} \cdot \frac{2}{5}$$

$$x = \frac{17}{72}$$

$$V = \left\{ \frac{17}{72} \right\}$$



13

Het dubbel van een getal is 1,6 meer dan de helft van dit getal. Bepaal dit getal.

- het getal: x
- $2x = \frac{1}{2}x + 1,6$
 $2x - \frac{1}{2}x = 1,6$
 $\frac{3}{2}x = 1,6$
 $x = 1,6 \cdot \frac{2}{3}$
 $x = \frac{16}{15}$
- Antwoord: Het getal is $\frac{16}{15}$.



14

Een getal met 16 vermeerderen geeft hetzelfde resultaat als het drievoud van dat getal met 40 te verminderen. Zoek dit getal.

- het getal: x
- $x + 16 = 3x - 40$
 $x - 3x = -40 - 16$
 $-2x = -56$
 $x = -56 : (-2)$
 $x = 28$
- Antwoord: Het getal is 28.



15

In een rechthoek is de lengte 20 meter langer dan de breedte. De omtrek is 240 m. Bepaal de lengte en breedte van deze rechthoek.

- lengte: $x + 20$
 breedte: x
- $2 \cdot x + 2 \cdot (x + 20) = 240$
 $2x + 2x + 40 = 240$
 $2x + 2x = 240 - 40$
 $4x = 200$
 $x = 200 : 4$
 $x = 50$
- Deze rechthoek heeft als lengte 70 m en breedte 50 m.



16

35, 17, 26 en een vierde getal hebben als gemiddelde 36. Bepaal het vierde getal.

- x : vierde getal
- $\frac{35 + 17 + 26 + x}{4} = 36$
 $35 + 17 + 26 + x = 36 \cdot 4$
 $78 + x = 144$
 $x = 144 - 78$
 $x = 66$
- Antwoord: Het vierde getal is 66.



17

- a) Een vierkant heeft een omtrek van $\sqrt{32}$ cm. Hoe lang is de zijde van het vierkant?
 b) Een cirkel heeft een omtrek van 9π . Bepaal de lengte van de straal.

a) $p = \sqrt{32} \text{ cm} = \sqrt{16 \cdot 2} \text{ cm} = 4 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}$
 $p = 4z$
 $4\sqrt{2} \text{ cm} = 4z$
 $\sqrt{2} \text{ cm} = z$

Antwoord: De zijde van het vierkant is $\sqrt{2}$ cm lang.

b) $p = 2\pi r$
 $9\pi = 2\pi r$
 $\frac{9\pi}{2\pi} = r$
 $\frac{9}{2} = r$
 $4,5 = r$

Antwoord: De straal van de cirkel is 4,5.



18

De omtrek van een vierkant is dezelfde als die van een cirkel met straal 5. Bepaal de zijde van het vierkant.

$p_{\text{cirkel}} = 2\pi r$
 $= 2\pi \cdot 5$
 $= 10\pi$

$p_{\text{vierkant}} = 4z$
 $4z = 10\pi$
 $z = \frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$

Antwoord: De zijde van het vierkant is $\frac{5\pi}{2}$.



19



Als een veer (elastisch) vervormd is, dan kun je de kracht die nodig is om de veer over een bepaalde afstand uit te rekken, berekenen met de formule $F_v = k \cdot \Delta l$. (F_v is de kracht in Newton (N), k is de veerconstante uitgedrukt in $\frac{\text{N}}{\text{m}}$ en Δl is de uitrekking van de veer in m.) Bereken de kracht die nodig is om een veer met veerconstante $5\sqrt{125} \frac{\text{N}}{\text{m}}$ over een afstand van $\frac{1}{5}\sqrt{5} \text{ m}$ uit te rekken.

$$\begin{aligned}
 F_v &= k \cdot \Delta l = 5\sqrt{125} \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{1}{5}\sqrt{5} \text{ m} \\
 &= \sqrt{5} \cdot 25 \cdot \sqrt{5} \text{ N} \\
 &= 5\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \text{ N} \\
 &= 5 \cdot 5 \text{ N} \\
 &= 25 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Antwoord: Er is een kracht nodig van 25N.



20

De verhouding van de omtrekken van twee gelijkvormige ruiten is $\sqrt{7}$. De grootste ruit heeft een omtrek van 84 cm. Bepaal de lengte van de zijde van de kleinste ruit.

Zijde kleinste ruit: x

Omtrek kleinste ruit: $4x$

$$\begin{aligned}
 \frac{p_{\text{grootste}}}{p_{\text{kleinste}}} &= \sqrt{7} \\
 \frac{84}{4x} &= \sqrt{7} \\
 84 &= 4\sqrt{7}x \\
 \frac{84}{4\sqrt{7}} &= x \\
 \frac{21\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{7}} &= x \\
 \frac{21\sqrt{7}}{7} &= x \\
 3\sqrt{7} &= x
 \end{aligned}$$

Antwoord: De lengte van de zijde van de kleinste ruit is $3\sqrt{7}$.



21

Op een poster in de wiskundeklas staan driehoeken en vierhoeken getekend. Margaux telt 31 figuren en 107 zijden. Hoeveel driehoeken en vierhoeken staan er op de poster?

aantal driehoeken: x

aantal vierhoeken: $31 - x$

$$\begin{aligned}
 3 \cdot x + 4 \cdot (31 - x) &= 107 \\
 3x + 124 - 4x &= 107 \\
 3x - 4x &= 107 - 124 \\
 -x &= -17 \\
 x &= 17
 \end{aligned}$$

Antwoord: Er staan 17 driehoeken en 14 vierhoeken op de poster.



22

De oppervlakte van een vierkant verkleint met 112 cm^2 als je elke zijde van dat vierkant met 4 cm verkort. Bepaal de lengte van een zijde van het oorspronkelijke vierkant.

lengte van een zijde van het oorspronkelijk vierkant: x

$$x^2 = (x - 4)^2 + 112$$

$$x^2 = x^2 - 8x + 16 + 112$$

$$x^2 - x^2 + 8x = 16 + 112$$

$$8x = 128$$

$$x = 16$$

Antwoord: De zijde van het vierkant was 16 cm.



23

Een gevuld vat olijfolie heeft een massa van 40 kg. Indien het vat nog slechts voor de helft gevuld is, is zijn massa 23 kg. Bereken de massa van het lege vat.



massa van het lege vat: x

massa van de olijfolie in volledig gevuld vat: $40 - x$

$$2 \cdot \left(x + \frac{40 - x}{2} \right) = (23) \cdot 2$$

$$2x + 40 - x = 46$$

$$2x - x = 46 - 40$$

$$x = 6$$

Antwoord: De massa van het lege vat is 6 kg.



24

Zoek drie opeenvolgende natuurlijke getallen zodat de som van driemaal het kleinste en viermaal het grootste 18 meer is dan het zesvoud van het middelste getal.

drie opeenvolgende natuurlijke getallen: $x - 1$, x , $x + 1$

$$3 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (x + 1) = 6 \cdot x + 18$$

$$3x - 3 + 4x + 4 = 6x + 18$$

$$3x + 4x - 6x = 18 + 3 - 4$$

$$x = 17$$

Antwoord: Deze getallen zijn 16, 17 en 18.



25

Vader is viermaal zo oud als zijn zoon Arne en driemaal zo oud als zijn dochter Linde. Linde is 4 jaar ouder dan Arne. Hoe oud zijn Arne, Linde en vader?

leeftijd Arne: x

leeftijd Linde: $x + 4$

leeftijd vader: $4x$

$$4x = 3(x + 4)$$

$$4x = 3x + 12$$

$$4x - 3x = 12$$

$$x = 12$$

Antwoord: Arne is 12 jaar, Linde is 16 jaar en vader is 48 jaar.



26

In een balk is de breedte 3 cm minder dan de hoogte en is de lengte 3 cm meer dan de hoogte. De totale oppervlakte is 468 cm^2 . Bereken de lengte, de breedte en de hoogte van die balk.

lengte: $x + 3$

$$A = 2 \cdot (l \cdot b + b \cdot h + l \cdot h)$$

breedte: $x - 3$

hoogte: x

$$2 \cdot ((x + 3)(x - 3) + x \cdot (x - 3) + x \cdot (x + 3)) = 468$$

$$2 \cdot (x^2 - 9 + x^2 - 3x + x^2 + 3x) = 468$$

$$2x^2 - 18 + 2x^2 - 6x + 2x^2 + 6x = 468$$

$$2x^2 + 2x^2 - \cancel{6x} + 2x^2 + \cancel{6x} = 468 + 18$$

$$6x^2 = 486$$

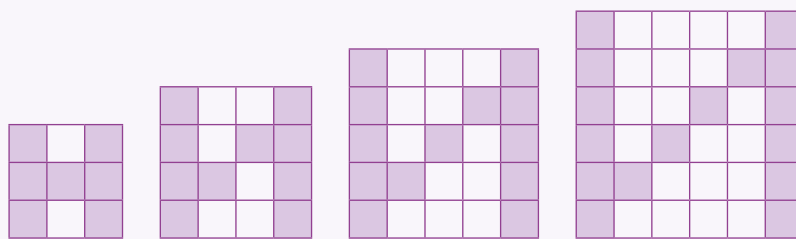
$$x^2 = 486 : 6$$

$$x^2 = 81$$

$$x = 9$$

Antwoord: De lengte is 12 cm, breedte 6 cm en hoogte 9 cm.





ZIJDE z	3	4	5	6	7	8	9
AANTAL GEKLEURDE VAKJES v	7	10	13	16	19	22	25

- a) Vervolledig de tabel.
 b) Bereken hoeveel gekleurde vakjes de figuur met zijde 21 zal hebben.
 c) In welk vierkant zullen er 43 gekleurde vakjes zijn?

b) $v = 3 \cdot z - 2 = 3 \cdot 21 - 2 = 61 \rightarrow 61$ gekleurde vakjes

c) $v = 3 \cdot z - 2$

$$43 = 3z - 2$$

$$43 + 2 = 3z$$

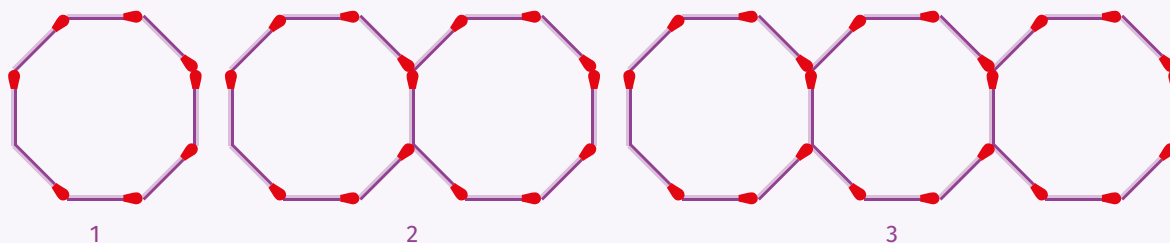
$$45 = 3z$$

$$\frac{45}{3} = z$$

$$15 = z \rightarrow \text{In een vierkant met } z = 15$$



Vul de tabel aan.



FIGUUR n	1	2	3	4	5	20	34
AANTAL LUCIFERS l	8	15	22	29	36	141	239

$$l = 7n + 1$$

$$239 = 7n + 1$$

$$238 = 7n$$

$$34 = n$$



29

Vader spreekt af met zijn zoon Senne om vraagstukken op te lossen. Voor elk correct opgelost vraagstuk krijgt Senne 5 euro, voor elk fout opgelost vraagstuk moet hij 3 euro teruggeven aan zijn vader. Na 20 vraagstukken heeft Senne 52 euro verdiend. Hoeveel vraagstukken heeft hij correct opgelost?



aantal correct opgeloste vraagstukken: x

aantal foute vraagstukken: $20 - x$

$$5 \cdot x - 3 \cdot (20 - x) = 52$$

$$5x - 60 + 3x = 52$$

$$5x + 3x = 52 + 60$$

$$8x = 112$$

$$x = 112 : 8$$

$$x = 14$$

Antwoord: Senne heeft 14 vraagstukken correct opgelost.



30

Sam heeft 75 geldstukken gespaard van 10, 20 en 50 cent. Hoeveel geld heeft ze gespaard als je weet dat het aantal stukken van 50 cent $\frac{3}{8}$ is van het aantal stukken van 10 cent en het aantal stukken van 20 cent de helft is van het aantal stukken van 10 cent?

aantal stukken van 10 cent: x

aantal stukken van 50 cent: $\frac{3}{8}x$

aantal stukken van 20 cent: $\frac{1}{2}x$

$$8 \cdot \left(x + \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}x \right) = (75) \cdot 8$$

$$8x + 3x + 4x = 600$$

$$15x = 600$$

$$x = 600 : 15$$

$$x = 40$$

$$40 \cdot 10 \text{ cent} = 400 \text{ cent}$$

$$15 \cdot 50 \text{ cent} = 750 \text{ cent}$$

$$20 \cdot 20 \text{ cent} = 400 \text{ cent}$$

Antwoord: Sam heeft 1550 cent of 15,50 euro gespaard.



31

Voor een voetbalwedstrijd voor het goede doel worden 3500 kaarten verkocht. Een ticket op de niet overdekte tribune kost € 10 en voor de overdekte tribune betaalt men € 15. Na de wedstrijd wordt een cheque van € 41750 overhandigd. Hoeveel personen kozen voor de overdekte tribune?



aantal tickets overdekte tribune: x

aantal tickets niet overdekte tribune: $3500 - x$

$$15 \cdot x + 10 \cdot (3500 - x) = 41750$$

$$15x + 35000 - 10x = 41750$$

$$5x - 10x = 41750 - 35000$$

$$5x = 6750$$

$$x = 6750 : 5$$

$$x = 1350$$

Antwoord: 1350 personen kozen voor de overdekte tribune.



32

Welke uitspraken zijn gelijkwaardig? Duid aan in eenzelfde kleur.

$A = \frac{D \cdot d}{2}$	$\frac{l}{\pi r^2}$	$l = \frac{4}{3} \pi r^3$	$c^2 - b^2 = a^2$	$l = \pi r^2 h$
$i = \frac{k \cdot p \cdot t}{100}$	$a^2 + b^2 = c^2$	$100i = k \cdot p \cdot t$	$2A = D \cdot d$	$\sqrt[3]{\frac{3l}{4\pi}} = r$
$b^2 = \sqrt{c^2 - a^2}$	$D = \frac{2A}{d}$	$\frac{3l}{\pi} = 4r^3$	$\sqrt{\frac{l}{\pi \cdot h}} = r$	$k = \frac{100i}{p \cdot t}$



33

De inhoud van een cilinder kun je berekenen met een formule.

formule: $l = \pi \cdot r^2 \cdot h$ met l : inhoud, r : straal en V : volume

- Vorm de formule om naar h .
- Bepaal de hoogte van een drinkfles als je weet dat de straal 3,5 cm is en de inhoud 750 ml is.



$$a) \frac{l}{\pi \cdot r^2} = h$$

$$b) 750 \text{ ml} = 750 \text{ cm}^3$$

$$\frac{750 \text{ cm}^3}{\pi \cdot (3,5 \text{ cm})^2} = h$$

$$19,5 \text{ cm} \approx h$$

Antwoord: De fles is ongeveer 19,5 cm hoog.



34

Vorm de formule om naar de gevraagde letter.

- a) Vorm $\rho = \frac{m}{V}$ om naar de letter V .
- b) Vorm $x_1 = x_0 + v \cdot t$ om naar t .
- c) Vorm $\rho \cdot V = n \cdot R \cdot T$ om naar n .
- d) Vorm $x_1 = x_0 + \frac{a \cdot t^2}{2}$ om naar t .

a) $V = \frac{m}{\rho}$

b) $\frac{x_1 - x_0}{v} = t$

c) $\frac{\rho \cdot V}{R \cdot T} = n$

d) $\sqrt{\frac{2(x_1 - x_0)}{a}} = t$



35

Een alcoholconcentratie kan je bereken met een formule.
Hoeveel gram alcohol krijg je binnen als je drie pilsen van 25 cl drinkt met een alcoholconcentratie van 5,2%?



TIP $5,2\% = 5,2 \frac{\text{g}}{\text{l}}$

formule: $c = \frac{m}{V}$ met c : alcoholconcentratie, m : massa en V : volume

$$V = 3 \cdot 25 \text{ cl} = 75 \text{ cl} = 0,75 \text{ l}$$

$$c = \frac{m}{V}$$

$$c \cdot V = m$$

$$5,2 \frac{\text{g}}{\text{l}} \cdot 0,75 \text{ l} = m$$

$$3,9 \text{ g} = m$$

Antwoord: Je krijgt 3,9 gram alcohol binnen als je drie pilsen drinkt.



36



De hydrostatische druk kan je berekenen met een formule.

Bereken hoe diep een voorwerp zich onder water bevindt als het een hydrostatische druk ondervindt van 300 000 Pascal ($= \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$). Rond af op 2 decimalen.

$$\rho_{\text{water}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \text{ en } g = 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

formule: $p_{\text{hydrostatisch}} = h \cdot \rho \cdot g$

met $p_{\text{hydrostatisch}}$: hydrostatische druk,

ρ : dichtheid van de vloeistof,

h : diepte van het voorwerp en

g : zwaarteveldsterkte

$$p_{\text{hydrostatisch}} = h \cdot \rho \cdot g$$

$$\frac{p_{\text{hydrostatisch}}}{\rho \cdot g} = h$$

$$\frac{300\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}} = h$$

$$30,58 \text{ m} \approx h$$

Antwoord: Een voorwerp bevindt zich 30,58 m onder water.



module p. 39

37



De afstand bij een versnelling kan je berekenen met een formule.

formule: $x = \frac{a \cdot t^2}{2}$ met x : afstand, a : versnelling, t : tijd

a) Bereken de afstand als je per seconde telkens $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ versnelt gedurende 10 seconden.

b) Hoeveel seconden moet je optrekken vanuit stilstand met een versnelling van $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ om 324 meter afgelegd te hebben?



TIP

Als je telkens $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

versnelt is $a = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$\begin{aligned} \text{a) } x &= \frac{a \cdot t^2}{2} \\ x &= \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (10 \text{ s})^2}{2} \\ x &= \frac{100 \text{ m}}{2} \\ x &= 50 \text{ m} \end{aligned}$$

Antwoord: Je legt 50 meter af als je gedurende 10 seconden $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ aflegt.

$$\begin{aligned} \text{b) } x &= \frac{a \cdot t^2}{2} \\ 2x &= a \cdot t^2 \\ \frac{2x}{a} &= t^2 \\ \sqrt{\frac{2x}{a}} &= t \\ \sqrt{\frac{2 \cdot 324 \text{ m}}{2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} &= t \\ \sqrt{324 \text{ s}^2} &= t \\ 18 \text{ s} &= t \end{aligned}$$

Antwoord: Je moet 18 seconden optrekken om 324 m afgelegd te hebben met een versnelling van $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



38

De totale afgelegde weg kan je berekenen met een formule.



formule: $x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$

Je hebt op de kilometer teller van je fiets al 42,5 km gereden ($= x_0$) en rijdt $28 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ($= v_0$) op het moment dat je abrupt moet remmen. Als je stilstaat heb je 42,52 km op de kilometer ($= x$). Je deed er 6 seconden over om stil te staan. Hoe groot was je versnelling ($= a$)?

TIP



Zet alles om naar meter en seconden.

Bij een negatieve versnelling vertraag je.

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \\
 x - x_0 - v_0 \cdot t &= \frac{a \cdot t^2}{2} \\
 2(x - x_0 - v_0 \cdot t) &= a \cdot t^2 \\
 \frac{2(x - x_0 - v_0 \cdot t)}{t^2} &= a \\
 \frac{2\left(42\,520 \text{ m} - 42\,500 \text{ m} - 7,78 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 6\text{s}\right)}{(6\text{s})^2} &= a \\
 -1,48 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} &\approx a
 \end{aligned}$$

Antwoord: Je versnelling is ongeveer $-1,48 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



module p. 40

39

Onderzoek of het gegeven reëel getal een oplossing van de ongelijkheid is.

- a) Is $x = 4$ een oplossing van de ongelijkheid $x + 3 < 7$?
- b) Is $y = 10$ een oplossing van de ongelijkheid $y - 6 \geq 2$?
- c) Is $z = 3$ een oplossing van de ongelijkheid $-4z \leq 0$?
- d) Is $t = 8$ een oplossing van de ongelijkheid $-4 + t < 3$?

- a) $4 + 3 = 7$ $7 \not< 7 \rightarrow$ geen oplossing
- b) $10 - 6 = 4$ $4 \geq 2 \rightarrow$ oplossing
- c) $-4 \cdot 3 = -12$ $-12 \leq 0 \rightarrow$ oplossing
- d) $-4 + 8 = 4$ $4 \not< 3 \rightarrow$ geen oplossing



40

Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

a) $x + 5 > 8$

b) $x - 2 \leq 6$

c) $3 + x < 9$

d) $t - 3 \geq 6$

e) $y + 5 \leq 0$

f) $z - 4 > -2$

a) $x + 5 > 8$

$x > 8 - 5$

$x > 3$

$V =]3, +\infty[$

b) $x - 2 \leq 6$

$x \leq 6 + 2$

$x \leq 8$

$V =]-\infty, 8]$

c) $3 + x < 9$

$x < 9 - 3$

$x < 6$

$V =]-\infty, 6[$

d) $t - 3 \geq 6$

$t \geq 6 + 3$

$t \geq 9$

$V = [9, +\infty[$

e) $y + 5 \leq 0$

$y \leq 0 - 5$

$y \leq -5$

$V =]-\infty, -5]$

f) $z - 4 > -2$

$z > -2 + 4$

$z > 2$

$V =]2, +\infty[$

41

Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

a) $5x \leq 30$

b) $-4x \leq 20$

c) $3x > 15$

d) $12 \leq -6x$

e) $-6y > -24$

f) $16 \geq -8z$

g) $4s < -12$

h) $28 > 7t$

a) $5x \leq 30$

$x \leq \frac{30}{5}$

$x \leq 6$

$V =]-\infty, 6]$

b) $-4x \leq 20$

$x \geq \frac{20}{-4}$

$x \geq -5$

$V = [-5, +\infty[$

c) $3x > 15$

$x > \frac{15}{3}$

$x > 5$

$V =]5, +\infty[$

d) $12 \leq -6x$

$-6x \geq 12$

$x \leq \frac{12}{-6}$

$x \leq -2$

$V =]-\infty, -2]$

e) $-6y > -24$

$y < \frac{-24}{-6}$

$y < 4$

$V =]-\infty, 4[$

f) $16 \geq -8z$

$-8z \leq 16$

$z \geq \frac{16}{-8}$

$z \geq -2$

$V = [-2, +\infty[$

g) $4s < -12$

$s < \frac{-12}{4}$

$s < -3$

$V =]-\infty, -3[$

h) $28 > 7t$

$7t < 28$

$t < \frac{28}{7}$

$t < 4$

$V =]-\infty, 4[$

42

Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

a) $-x + 3 \leq 7$

c) $4 - z < -1$

b) $-y + 6 \geq -2$

d) $5 > 9 - t$

a) $-x + 3 \leq 7$

$-x \leq 7 - 3$

$-x \leq 4$

$x \geq -4$

$V = [-4, +\infty[$

c) $4 - z < -1$

$-z < -1 - 4$

$-z < -5$

$z > 5$

$V =]5, +\infty[$

b) $-y + 6 \geq -2$

$-y \geq -2 - 6$

$-y \geq -8$

$y \leq 8$

$V =]-\infty, 8]$

d) $5 > 9 - t$

$9 - t < 5$

$-t < 5 - 9$

$-t < -4$

$t > 4$

$V =]4, +\infty[$

43

Onderzoek of het gegeven reëel getal een oplossing van de ongelijkheid is.

a) Is $x = 4$ een oplossing van de ongelijkheid $\sqrt{2}x \geq 6$?

b) Is $y = \pi$ een oplossing van de ongelijkheid $4y \leq 12$?

c) Is $z = -2$ een oplossing van de ongelijkheid $-3z > 6$?

d) Is $t = \frac{3}{4}$ een oplossing van de ongelijkheid $3 > \frac{7}{2}t$?

a) $4\sqrt{2} = 5,65685... \rightarrow 4\sqrt{2} < 6 \rightarrow$ geen oplossing

b) $4\pi = 12,56... \rightarrow 4\pi > 12 \rightarrow$ geen oplossing

c) $-3 \cdot (-2) = 6 \rightarrow 6 = 6 \rightarrow$ geen oplossing

d) $\frac{7}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{8} = 2,625 \rightarrow 3 > \frac{21}{8} \rightarrow$ oplossing

Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

a) $x - 2,4 \geq 3,8$

c) $1,7 < z + 2,5$

e) $1 \geq 3y$

b) $0,88 - y \leq 1,12$

d) $-5x < 8$

f) $0 \leq -4z$

a) $x - 2,4 \geq 3,8$

$$x \geq 3,8 + 2,4$$

$$x \geq 6,2$$

$$V = [6,2; +\infty[$$

c) $1,7 < z + 2,5$

$$z + 2,5 > 1,7$$

$$z > 1,7 - 2,5$$

$$z > -0,8$$

$$V =]-0,8; +\infty[$$

e) $1 \geq 3y$

$$3y \leq 1$$

$$y \leq \frac{1}{3}$$

$$V = \left] -\infty, \frac{1}{3} \right]$$

b) $0,88 - y \leq 1,12$

$$-y \leq 1,12 - 0,88$$

$$-y \leq 0,24$$

$$y \geq -0,24$$

$$V = [-0,24; +\infty[$$

d) $-5x < 8$

$$x > \frac{8}{-5}$$

$$x > -\frac{8}{5}$$

$$V = \left] -\frac{8}{5}, +\infty \right[$$

f) $0 \leq -4z$

$$-4z \geq 0$$

$$z \leq \frac{0}{-4}$$

$$z \leq 0$$

$$V = \mathbb{R}^-$$

$$=]-\infty, 0]$$



Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

a) $3x \leq \frac{9}{4}$

b) $-2y > \frac{8}{5}$

c) $-4 \geq -7z$

d) $0,2t > -10$

e) $-6x > \frac{9}{2}$

f) $5y \leq \frac{-7}{5}$

g) $13 < -4z$

h) $-8 \geq 0,5t$

$$\begin{aligned} \text{a) } 3x &\leq \frac{9}{4} \\ x &\leq \frac{9^3}{4} \cdot \frac{1}{3_1} \\ x &\leq \frac{3}{4} \\ V &= \left] -\infty, \frac{3}{4} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } -2y &> \frac{8}{5} \\ y &< \frac{8^4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2_1} \right) \\ y &< -\frac{4}{5} \\ V &= \left] -\infty, -\frac{4}{5} \right[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } -4 &\geq -7z \\ -7z &\leq -4 \\ z &\geq \frac{-4}{-7} \\ z &\geq \frac{4}{7} \\ V &= \left[\frac{4}{7}, +\infty \right[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 0,2t &> -10 \\ t &> -10 : 0,2 \\ t &> -50 \\ V &= \left] -50, +\infty \right[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } -6x &> \frac{9}{2} \\ x &< \frac{9^3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6_2} \right) \\ x &< \frac{-3}{4} \\ V &= \left] -\infty, -\frac{3}{4} \right[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } 5y &\leq \frac{-7}{5} \\ y &\leq -\frac{7}{5} \cdot \frac{1}{5} \\ y &\leq -\frac{7}{25} \\ V &= \left] -\infty, -\frac{7}{25} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } 13 &< -4z \\ -4z &> 13 \\ z &< \frac{13}{-4} \\ z &< -\frac{13}{4} \\ V &= \left] -\infty, -\frac{13}{4} \right[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } -8 &\geq 0,5t \\ 0,5t &\leq -8 \\ t &\leq -8 : 0,5 \\ t &\leq -16 \\ V &= \left] -\infty, -16 \right] \end{aligned}$$



46

Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

a) $\sqrt{3}x \geq \sqrt{12}$

b) $-\sqrt{2}y < \sqrt{8}$

c) $\sqrt{20} \leq -\sqrt{5}z$

d) $\sqrt{2}t > -\sqrt{32}$

a) $\sqrt{3}x \geq \sqrt{12}$

$$x \geq \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$$

$$x \geq \sqrt{\frac{12^4}{3^4}}$$

$$x \geq 2$$

$$V = [2, +\infty[$$

c) $\sqrt{20} \leq -\sqrt{5}z$

$$-\sqrt{5}z \geq \sqrt{20}$$

$$z \leq \frac{\sqrt{20}}{-\sqrt{5}}$$

$$z \leq -\sqrt{\frac{20^4}{5^4}}$$

$$z \leq -2$$

$$V =]-\infty, -2]$$

b) $-\sqrt{2}y < \sqrt{8}$

$$y > \frac{\sqrt{8}}{-\sqrt{2}}$$

$$y > -\sqrt{\frac{8^4}{2^4}}$$

$$y > -2$$

$$V =]-2, +\infty[$$

d) $\sqrt{2}t > -\sqrt{32}$

$$t > \frac{-\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$$

$$t > -\sqrt{\frac{32^4}{2^4}}$$

$$t > -4$$

$$V =]-4, +\infty[$$



47

Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

a) $14 \geq 5x - 6$

b) $-8 \leq 12 - 2y$

c) $3z - 6 < 12$

d) $-4t + 9 > 21$

a) $14 \geq 5x - 6$

$$5x - 6 \leq 14$$

$$5x \leq 20$$

$$x \leq \frac{20}{5}$$

$$x \leq 4$$

$$V =]-\infty, 4]$$

c) $3z - 6 < 12$

$$3z < 18$$

$$z < \frac{18}{3}$$

$$z < 6$$

$$V =]-\infty, 6[$$

b) $-8 \leq 12 - 2y$

$$12 - 2y \geq -8$$

$$-2y \geq -20$$

$$y \leq \frac{-20}{-2}$$

$$y \leq 10$$

$$V =]-\infty, 10]$$

d) $-4t + 9 > 21$

$$-4t > 12$$

$$t < \frac{12}{-4}$$

$$t < -3$$

$$V =]-\infty, -3[$$



48

Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

a) $x - 9 < -5x + 9$

b) $4y + 3 - 2y - 8 \geq 7$

c) $3z - 2 \geq 7z + 6$

d) $4 - r \leq 3 - 2r$

e) $15 - 4s \leq s$

f) $2t - 14 > 5t + 6 - 8t$

a) $x - 9 < -5x + 9$

$x + 5x < 9 + 9$

$6x < 18$

$x < \frac{18}{6}$

$x < 3$

$V =]-\infty, 3[$

d) $4 - r \leq 3 - 2r$

$-r + 2r \leq 3 - 4$

$r \leq -1$

$V =]-\infty, -1]$

b) $4y + 3 - 2y - 8 \geq 7$

$4y - 2y \geq 7 - 3 + 8$

$2y \geq 12$

$y \geq \frac{12}{2}$

$y \geq 6$

$V = [6, +\infty[$

e) $15 - 4s \leq s$

$-4s - s \leq -15$

$-5s \leq -15$

$s \geq \frac{-15}{-5}$

$s \geq 3$

$V = [3, +\infty[$

c) $3z - 2 \geq 7z + 6$

$3z - 7z \geq 6 + 2$

$-4z \geq 8$

$z \leq \frac{8}{-4}$

$z \leq -2$

$V =]-\infty, -2]$

f) $2t - 14 > 5t + 6 - 8t$

$2t - 5t + 8t > 6 + 14$

$5t > 20$

$t > \frac{20}{5}$

$t > 4$

$V =]4, +\infty[$



49

Welke rekenregel werd er toegepast bij de volgende omzetting? Formuleer deze rekenregel in woorden én symbolen.

$3,2 \geq -1,4 \implies -3,2 \leq 1,4$

Als we beide leden van een ongelijkheid met (of door) eenzelfde strikt negatief reëel getal vermenigvuldigen (of delen), dan keert de zin van de ongelijkheid om.

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}_0^-: a \leq b \implies a \cdot c \geq b \cdot c$

$$\left(a \leq b \implies \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c} \right)$$



50

Onderzoek of het gegeven reëel getal een oplossing van de ongelijkheid is.

- a) Is $x = 2$ een oplossing van de ongelijkheid $\sqrt{3}x \geq \sqrt{10}$?
- b) Is $y = 10$ een oplossing van de ongelijkheid $\frac{1}{3}y > \sqrt{8}$?
- c) Is $z = \pi$ een oplossing van de ongelijkheid $-3z \leq -5\pi$?
- d) Is $t = -\frac{5}{3}$ een oplossing van de ongelijkheid $6t < -3 \cdot \frac{7}{2}$?

- a) $2\sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12} \rightarrow \sqrt{12} \geq \sqrt{10} \rightarrow$ oplossing
- b) $\frac{1}{3} \cdot 10 = \frac{10}{3} = 3,333... \text{ en } \sqrt{8} = 2,8284... \rightarrow \frac{10}{3} > \sqrt{8} \rightarrow$ oplossing
- c) $-3\pi \rightarrow -3\pi > -5\pi \rightarrow$ geen oplossing
- d) $2\cancel{6} \cdot \left(-\frac{5}{\cancel{3}1}\right) = 10 = -\frac{20}{2} \text{ en } -3 \cdot \frac{7}{2} = -\frac{21}{2} \rightarrow -\frac{20}{2} > -\frac{21}{2} \rightarrow$ geen oplossing



51

Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

- a) $3x + (5 - 8x) < 9$
- b) $8y - (10y - 4) \geq 10$
- c) $6 + 3(2z - 5) \leq 7 + 10z$
- d) $(-3) \cdot (2 - r) - 8 > 4$
- e) $6 - 3s \geq 9s + (-5)(4s + 2)$
- f) $-3(t - 5) + t \leq 4(2 - t) - 1$

- a) $3x + (5 - 8x) < 9$
 $3x + 5 - 8x < 9$
 $3x - 8x < 9 - 5$
 $-5x < 4$
 $x > -\frac{4}{5}$
 $V =]-\frac{4}{5}, +\infty[$
- b) $8y - (10y - 4) \geq 10$
 $8y - 10y + 4 \geq 10$
 $8y - 10y \geq 10 - 4$
 $-2y \geq 6$
 $y \leq \frac{6}{-2}$
 $y \leq -3$
 $V =]-\infty, -3]$
- c) $6 + 3(2z - 5) \leq 7 + 10z$
 $6 + 6z - 15 \leq 7 + 10z$
 $6z - 10z \leq 7 - 6 + 15$
 $-4z \leq 16$
 $z \geq \frac{16}{-4}$
 $z \geq -4$
 $V = [-4, +\infty[$
- d) $(-3) \cdot (2 - r) - 8 > 4$
 $-6 + 3r - 8 > 4$
 $3r > 4 + 6 + 8$
 $3r > 18$
 $r > \frac{18}{3}$
 $r > 6$
 $V =]6, +\infty[$
- e) $6 - 3s \geq 9s + (-5)(4s + 2)$
 $6 - 3s \geq 9s - 20s - 10$
 $-3s - 9s + 20s \geq -10 - 6$
 $8s \geq -16$
 $s \geq \frac{-16}{8}$
 $s \geq -2$
 $V = [-2, +\infty[$
- f) $-3(t - 5) + t \leq 4(2 - t) - 1$
 $-3t + 15 + t \leq 8 - 4t - 1$
 $-3t + t + 4t \leq 8 - 1 - 15$
 $2t \leq -8$
 $t \leq \frac{-8}{2}$
 $t \leq -4$
 $V =]-\infty, -4]$



Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

Voorbeeld: $\frac{3}{5}x \leq -\frac{9}{4}$

$$x \leq \frac{-\frac{9}{4}}{\frac{3}{5}}$$

$$x \leq -\frac{9}{4} \cdot \frac{5}{3}$$

$$x \leq -\frac{9 \cdot 5}{4 \cdot 3}$$

$$x \leq -\frac{45}{12}$$

$$x \leq -\frac{15}{4}$$

a) $-\frac{1}{3}x > -4\pi$

b) $\frac{7}{2}y \leq \frac{3}{4}$

c) $-\frac{4}{5}z \leq 2$

d) $\frac{3}{8}t > -\frac{1}{2}$

a) $-\frac{1}{3}x > -4\pi$

$$x < -4\pi : \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$x < -4\pi \cdot (-3)$$

$$x < 12\pi$$

$$V =]-\infty, 12\pi[$$

c) $-\frac{4}{5}z \leq 2$

$$z \geq 2 : \left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$z \geq 2 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$z \geq -\frac{5}{2}$$

$$V = \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right[$$

b) $\frac{7}{2}y \leq \frac{3}{4}$

$$y \leq \frac{3}{4} : \frac{2}{7}$$

$$y \leq \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7}$$

$$y \leq \frac{3}{14}$$

$$V = \left]-\infty, \frac{3}{14}\right]$$

d) $\frac{3}{8}t > -\frac{1}{2}$

$$t > -\frac{1}{2} : \frac{8}{3}$$

$$t > -\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3}$$

$$t > -\frac{4}{3}$$

$$V = \left]-\frac{4}{3}, +\infty\right[$$



53

Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op in $\mathbb{R}$. Zet de decimale cijfers eerst om naar breukvorm. Kijk naar het voorbeeld uit de vorige oefening.

a) $0,8x > 2,4$

b) $1,2y \leq -\frac{2}{3}$

c) $3,6 \geq -0,5z$

d) $0,6t < -1,75$

a) $0,8x > 2,4$

$$\frac{4}{5}x > \frac{12}{5}$$

$$x > \frac{12}{5} : \frac{4}{5}$$

$$x > \frac{12^3}{5^1} \cdot \frac{5^1}{4^1}$$

$$x > 3$$

$$V =]3, +\infty[$$

c) $3,6 \geq -0,5z$

$$\frac{18}{5} \geq -\frac{1}{2}z$$

$$-\frac{1}{2}z \leq \frac{18}{5}$$

$$z \geq \frac{18}{5} : \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$z \geq \frac{18}{5} \cdot (-2)$$

$$z \geq -\frac{36}{5}$$

$$V = \left[-\frac{36}{5}, +\infty\right[$$

b) $1,2y \leq -\frac{2}{3}$

$$\frac{6}{5}y \leq -\frac{2}{3}$$

$$y \leq -\frac{2}{3} : \frac{6}{5}$$

$$y \leq -\frac{2^1}{3^1} \cdot \frac{5}{6^1}$$

$$y \leq -\frac{5}{9}$$

$$V = \left]-\infty, -\frac{5}{9}\right]$$

d) $0,6t < -1,75$

$$\frac{3}{5}t < -\frac{7}{4}$$

$$t < -\frac{7}{4} : \frac{5}{3}$$

$$t < -\frac{7}{4} \cdot \frac{5}{3}$$

$$t < -\frac{35}{12}$$

$$V = \left]-\infty, -\frac{35}{12}\right[$$



54

Indien $a, b, c \in \mathbb{R}$ met $b < c$ en $a < 0$ geldt dan $\frac{b}{a} < \frac{c}{a}$? Waarom wel/niet?

Als je beide leden van een ongelijkheid door een strikt negatief reëel getal deelt, dan keert de zin van de ongelijkheid om. Hier blijft de zin van de ongelijkheid behouden. Dit geldt dus niet.



55

Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

a) $\frac{5}{3}x - \frac{1}{6} > \frac{3}{4}x + \frac{7}{2}$

b) $3[2y - (2 + 4y) - 1] \geq 3(y - 4)$

c) $4z + \frac{5}{2} \leq -2\left(z - \frac{1}{3}\right) + 3$

d) $(t + 4)^2 - 9 > t^2 + 5t - 2$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{5}{3}x - \frac{1}{6} &> \frac{3}{4}x + \frac{7}{2} \\
 20x - 2 &> 9x + 42 \quad (\text{noemer 12}) \\
 20x - 9x &> 42 + 2 \\
 11x &> 44 \\
 x &> \frac{44}{11} \\
 x &> 4 \\
 V &=]4, +\infty[
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } 4z + \frac{5}{2} &\leq -2\left(z - \frac{1}{3}\right) + 3 \\
 4z + \frac{5}{2} &\leq -2z + \frac{2}{3} + 3 \\
 24z + 15 &\leq -12z + 4 + 18 \quad (\text{noemer 6}) \\
 24z + 12z &\leq 4 + 18 - 15 \\
 36z &\leq 7 \\
 z &\leq \frac{7}{36} \\
 V &= \left]-\infty, \frac{7}{36}\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } 3[2y - (2 + 4y) - 1] &\geq 3(y - 4) \\
 3(2y - 2 - 4y - 1) &\geq 3y - 12 \\
 6y - 6 - 12y - 3 &\geq 3y - 12 \\
 6y - 12y - 3y &\geq -12 + 6 + 3 \\
 -9y &\geq -3 \\
 y &\leq \frac{-3}{-9} \\
 y &\leq \frac{1}{3} \\
 V &= \left]-\infty, \frac{1}{3}\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } (t + 4)^2 - 9 &> t^2 + 5t - 2 \\
 t^2 + 8t + 16 - 9 &> t^2 + 5t - 2 \\
 t^2 + 8t - t^2 - 5t &> -2 - 16 + 9 \\
 3t &> -9 \\
 t &> \frac{-9}{3} \\
 t &> -3 \\
 V &=]-3, +\infty[
 \end{aligned}$$



56

Als $2 \leq a \leq 5$ en $4 \leq b \leq 6$, tussen welke getallen ligt dan $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$?

$$\begin{aligned}
 2 \leq a \leq 5 \quad \text{en} \quad 4 \leq b \leq 6 \\
 \frac{1}{2} \geq \frac{1}{a} \geq \frac{1}{5} \quad \frac{1}{4} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{6} \\
 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \\
 \frac{3}{4} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{11}{30}
 \end{aligned}$$



Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op in $\mathbb{R}$.

a) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{6} < -\frac{1}{2}\left(2 - \frac{5}{6}x\right)$

b) $y + 5\left(y - \frac{8}{5}\right) \geq \frac{4}{3} - \frac{2}{3}(y - 3)$

c) $\frac{2z-1}{3} - \frac{z}{5} \leq \frac{2z-3}{3} - \frac{2}{15}$

d) $7t + (3t - 2)^2 + (10 - t) > t^2 + 4(2t^2 - 1)$

a) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{6} < -\frac{1}{2}\left(2 - \frac{5}{6}x\right)$

$$\frac{3}{2}x + \frac{5}{6} < -1 + \frac{5}{12}x$$

$$18x + 10 < -12 + 5x$$

$$18x - 5x < -12 - 10$$

$$13x < -22$$

$$x < -\frac{22}{13}$$

$$V =]-\infty, -\frac{22}{13}[$$

c) $\frac{2z-1}{3} - \frac{z}{5} \leq \frac{2z-3}{3} - \frac{2}{15}$

$$5(2z - 1) - 3z \leq 5(2z - 3) - 2$$

$$10z - 5 - 3z \leq 10z - 15 - 2$$

$$10z - 3z - 10z \leq -15 - 2 + 5$$

$$-3z \leq -12$$

$$z \geq \frac{-12}{-3}$$

$$z \geq 4$$

$$V = [4, +\infty[$$

b) $y + 5\left(y - \frac{8}{5}\right) \geq \frac{4}{3} - \frac{2}{3}(y - 3)$

$$y + 5y - 8 \geq \frac{4}{3} - \frac{2}{3}y + 2$$

$$3y + 15y - 24 \geq 4 - 2y + 6$$

$$3y + 15y + 2y \geq 4 + 6 + 24$$

$$20y \geq 34$$

$$y \geq \frac{34}{20}$$

$$y \geq \frac{17}{10}$$

$$V = \left[\frac{17}{10}, +\infty\right[$$

d) $7t + (3t - 2)^2 + (10 - t) > t^2 + 4(2t^2 - 1)$

$$7t + 9t^2 - 12t + 4 + 10 - t > t^2 + 8t^2 - 4$$

$$7t + 9t^2 - 12t - t - t^2 - 8t^2 > -4 - 4 - 10$$

$$-6t > -18$$

$$t < \frac{-18}{-6}$$

$$t < 3$$

$$V =]-\infty, 3[$$



58

Bewijs dat $\forall x, y \in \mathbb{R}: 2xy \leq x^2 + y^2$ **TIP** $x^2 \geq 0$

$$\begin{aligned}
 2xy \leq x^2 + y^2 &\longrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \\
 x^2 + y^2 - 2xy &\geq 0 \\
 (x - y)^2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Een kwadraat is steeds positief.

Dit klopt dus en zodoende is het bewijs geleverd.



59

Bewijs dat $\forall a, b \in \mathbb{R}$ met $0 < a < b$: $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

- a en b zijn strikt positieve reële getallen.
 - Een positieve breuk met teller 1 wordt kleiner als de noemer groter wordt.
- $$0 < a < b, \text{ dus } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$



60

Bewijs dat $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ : a + \frac{1}{a} \geq 2$ Waarom werd de mogelijkheid $a = 0$ uitgesloten?

- $$\begin{aligned}
 a + \frac{1}{a} &\geq 2 \\
 \frac{a^2}{a} + \frac{1}{a} &\geq \frac{2a}{a} \quad \left(\begin{array}{l} a \neq 0 \\ a > 0 \end{array} \right) \\
 a^2 + 1 &\geq 2a \\
 a^2 - 2a + 1 &\geq 0 \\
 (a - 1)^2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Een kwadraat is altijd positief, dus dit klopt en zodoende is het bewijs geleverd.

- Als $a = 0$ dan bestaat $\frac{1}{a}$ niet, daarom werd de mogelijkheid $a = 0$ uitgesloten.



61

Het drievoud van een getal is groter dan 15. Bepaal alle reële getallen die aan deze voorwaarde voldoen.

een getal: x

$$3x = 15$$

$$x = \frac{15}{3}$$

$$x = 5$$

Controle: • $6 \longrightarrow 3 \cdot 6 = 18$ en $18 > 15$

• $2 \longrightarrow 3 \cdot 2 = 6$ en $6 < 15$

- De referentieverzameling is $\mathbb{R}$.

Antwoord: Elk reëel getal groter dan 5 voldoet aan deze voorwaarde.



62

Aan een boom groeien elke dag 5 peren. Momenteel hangen er 90 peren aan de boom. Binnen hoeveel dagen hangen er meer dan 135 peren aan de boom?



aantal dagen: x

$$90 + 5x > 135$$

$$5x > 135 - 90$$

$$5x > 45$$

$$x > \frac{45}{5}$$

$$x > 9$$

Controle: • $10 \rightarrow 90 + 50 = 140$ en $140 > 135$

• $5 \rightarrow 90 + 25 = 115$ en $115 < 135$

- De referentieverzameling is $\mathbb{N}$.

Antwoord: Na meer dan 9 dagen hangen er meer dan 135 peren aan de boom.



63

Jolien is 15 jaar oud. Haar vader is 39 jaar. Binnen hoeveel jaar is de vader van Jolien minstens twee keer zo oud als zijn dochter?

aantal jaar later: x

$$39 + x \geq 2(15 + x)$$

$$39 + x \geq 30 + 2x$$

$$x - 2x \geq 30 - 39$$

$$-x \geq -9$$

$$x \leq 9$$

Controle: • $8 \rightarrow 39 + 8 = 47$ en $2(15 + 8) = 46 \rightarrow 47 \geq 46$

• $10 \rightarrow 39 + 10 = 49$ en $2(15 + 10) = 50 \rightarrow 49 < 50$

- De referentieverzameling is $\mathbb{N}$.

Antwoord: Na 9 jaar is de vader minstens dubbel zo oud als Jolien.



64

Voor welke reële getallen is het zesvoud minstens gelijk aan het dubbel van dat getal vermeerderd met 100?

reëel getal: x

$$6x \geq 2x + 100$$

$$6x - 2x \geq 100$$

$$4x \geq 100$$

$$x \geq \frac{100}{4}$$

$$x \geq 25$$

Controle: • $100 \rightarrow 600 \geq 200 + 100 \rightarrow 600 \geq 300$

• $10 \rightarrow 60 \leq 20 + 100 \rightarrow 60 \leq 120$

- De referentieverzameling is $\mathbb{R}$.

Antwoord: Elk reëel getal dat groter of gelijk is aan 25 voldoet hieraan.



65

Bepaal de lengte van de zijden van een gelijkzijdige driehoek als je weet dat haar omtrek hoogstens 48 cm bedraagt.

lengte van de zijde van de driehoek: x

$$3x \leq 48$$

$$x \leq \frac{48}{3}$$

$$x \leq 16$$

Controle: • $10 \rightarrow 30 \leq 48$

• $20 \rightarrow 60 \geq 48$

• De referentieverzameling is $\mathbb{R}_0^+$.

Antwoord: Als de zijden van een gelijkzijdige driehoek tussen 0 en 16 cm lang zijn, dan is de omtrek hoogstens 48 cm.



66

Hoeveel moet ik minstens in kasbons sparen om één jaar later met de intrest voldoende over te houden om een fiets van 900 euro te kunnen kopen? De kasbons hebben een netto-intrestvoet van 2%.

bedrag van de kasbons: x

$$0,02x \geq 900$$

$$x \geq \frac{900}{0,02}$$

$$x \geq 45000$$

Controle: • $50000 \rightarrow 0,02 \cdot 50000 = 1000$ en $1000 > 900$

• $40000 \rightarrow 0,02 \cdot 40000 = 800$ en $800 < 900$

• De referentieverzameling is $\mathbb{N}_0$.

Antwoord: Je moet voor minstens € 45000,00 aan kasbons kopen.



67

Voor welke positieve reële getallen is één derde van dat getal hoogstens 10 meer dan één vijfde van dat getal?

positief reëel getal: x

$$\frac{1}{3}x \leq \frac{1}{5}x + 10$$

$$5x \leq 3x + 150 \quad (\text{noemer 15})$$

$$5x - 3x \leq 150$$

$$2x \leq 150$$

$$x \leq \frac{150}{2}$$

$$x \leq 75$$

Controle: • $60 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot 60 = 20$ en $12 + 10 = 22 \rightarrow 20 \leq 22$

• $90 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot 90 = 30$ en $18 + 10 = 28 \rightarrow 30 > 28$

• De referentieverzameling is $\mathbb{R}^+$.

Antwoord: Elk positief reëel getal dat kleiner of gelijk is aan 75 voldoet aan deze voorwaarde.





Op een meerkeuzetoets worden 20 vragen gesteld. Bij elke vraag kan je uit 4 mogelijke antwoorden kiezen. Voor elk juist antwoord krijg je 3 punten. Voor elk fout antwoord -1 punt (giscorrectie). Veronderstel dat je alle vragen beantwoordt (geen blanco's). Hoeveel vragen moet je minstens juist hebben om voor deze toets te slagen?

aantal juist beantwoorde vragen: x

aantal fout beantwoorde vragen: $20 - x$

Er zijn in totaal $3 \cdot 20 = 60$ punten te verdienen.

$$3x - (20 - x) \geq 30$$

$$3x - 20 + x \geq 30$$

$$3x + x \geq 30 + 20$$

$$4x \geq 50$$

$$x \geq \frac{50}{4}$$

$$x \geq 12,5$$

Controle: • $15 \rightarrow 15 \cdot 3 - 5 = 40$ en $40 \geq 30$

• $10 \rightarrow 10 \cdot 3 - 10 = 20$ en $20 < 30$

• De referentieverzameling is $\mathbb{N}$ en $x \leq 20$.

Antwoord: Als je minstens 13 vragen correct beantwoordt, dan slaag je voor deze toets.



69

Een trapezium is 4 cm hoog en heeft een kleine basis van 8 cm. Bepaal de mogelijke lengte van de grote basis als je weet dat de oppervlakte van het trapezium minstens 42 cm² bedraagt.

lengte van de grote basis: x

$$\frac{(x+8) \cdot 4}{2} \geq 42$$

$$(x+8) \cdot 2 \geq 42$$

$$x+8 \geq \frac{42}{2}$$

$$x \geq 21 - 8$$

$$x \geq 13$$

Controle: • $15 \rightarrow \frac{(15+8) \cdot 4}{2} = 46 \rightarrow 46 \geq 42$

• $10 \rightarrow \frac{(10+8) \cdot 4}{2} = 36 \rightarrow 36 < 42$

• De referentieverzameling is $\mathbb{R}_0^+$ (en $x > 8$).

Antwoord: De grote basis is minstens 13 cm lang.



70

Een auto heeft een brandstoftank van 60 liter. In het stadsverkeer verbruikt de auto gemiddeld 6 liter per 100 km en op de autosnelwegen verbruikt hij 4 liter per 100 km. Hoeveel kilometer kan je met deze auto maximaal rijden als je weet dat 40% van de afgelegde weg in de stad gereden wordt?



aantal gereden km: x

$$0,4 \cdot 6 \cdot 0,01x + 0,6 \cdot 4 \cdot 0,01x \leq 60$$

$$0,024x + 0,024x \leq 60$$

$$0,048x \leq 60$$

$$x \leq 1250$$

Controle: • $1000 \rightarrow 24 + 24 = 48$ en $48 \leq 60$

• $2000 \rightarrow 48 + 48 = 96$ en $96 > 60$

• De referentieverzameling is $\mathbb{R}_0^+$.

Antwoord: Je kan maximaal 1250 km rijden.



71

Een cilinder heeft een straal van 4 cm en een totale oppervlakte van hoogstens 420 cm^2 . Bepaal de mogelijke hoogtes van deze cilinder. Rond je uitkomst af op 0,1 cm.

hoogte van de cilinder: x

$$2 \cdot \pi \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot x \leq 420$$

$$32\pi + 8\pi x \leq 420$$

$$8\pi x \leq 420 - 32\pi$$

$$x \leq \frac{420 - 32\pi}{8\pi}$$

$$x \leq 12,7$$

Controle: • $h = 10 \rightarrow 2 \cdot \pi \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10 = 351,9 \rightarrow 351,9 \leq 420$

• $h = 20 \rightarrow 2 \cdot \pi \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 20 = 603,2 \rightarrow 603,2 \geq 420$

- De referentieverzameling is $\mathbb{R}_0^+$.

Antwoord: De hoogte van deze cilinder is maximaal 12,7 cm.



72

De noemer van een breuk is 10 groter dan de teller. Veronderstel dat de teller en de noemer van de breuk positief zijn. Bovendien zijn de teller en de noemer onderling ondeelbaar. Trekt men van zowel de teller als de noemer zes af, dan is de waarde van de breuk kleiner dan 0,5. Bepaal alle mogelijke breuken die aan deze voorwaarden voldoen.

teller van de breuk: x

noemer van de breuk: $x + 10$

$$\frac{x - 6}{x + 10 - 6} < 0,5$$

$$\frac{x - 6}{x + 4} < 0,5$$

$$x - 6 < 0,5(x + 4) \quad (x + 4 \in \mathbb{R}_0^+)$$

$$x - 6 < \frac{1}{2}x + 2$$

$$x - \frac{1}{2}x < 2 + 6$$

$$\frac{1}{2}x < 8$$

$$x < 8 \cdot \frac{2}{1}$$

$$x < 16$$

Controle: • $13 \rightarrow \frac{13 - 6}{23 - 6} = \frac{7}{17} = 0,41176... \rightarrow \frac{7}{17} < 0,5$

• $20 \rightarrow \frac{20 - 6}{30 - 6} = \frac{14}{24} = 0,58333... \rightarrow \frac{14}{24} > 0,5$

- De referentieverzameling is $\mathbb{N}$.

Let op: x en $x + 10$ moeten onderling ondeelbaar zijn.

De mogelijke breuken zijn:

$$\frac{1}{11}, \frac{2}{12}, \frac{3}{13}, \frac{4}{14}, \frac{5}{15}, \frac{6}{16}, \frac{7}{17}, \frac{8}{18}, \frac{9}{19}, \frac{10}{20}, \frac{11}{21}, \frac{12}{22}, \frac{13}{23}, \frac{14}{24}, \frac{15}{25}$$

Antwoord: De mogelijke breuken zijn: $\frac{1}{11}, \frac{3}{13}, \frac{7}{17}, \frac{9}{19}, \frac{11}{21}$ en $\frac{13}{23}$.



73

Twee klassen maken een busreis voor een schooluitstap. Er zitten 36 leerlingen in de twee klassen samen. Als er een derde klas met 12 leerlingen zou meereizen, dan kost de reis minstens 9 euro per leerling minder. Hoeveel bedraagt de totale kostprijs van de busreis?



x = totale kostprijs

$$\frac{x}{36} \geq \frac{x}{48} + 9$$

$$4x \geq 3x + 1296 \quad (\text{noemer 144})$$

$$4x - 3x \geq 1296$$

$$x \geq 1296$$

Controle: • $1300 \rightarrow \frac{1300}{36} = 36,111\dots$ en $\frac{1300}{48} + 9 = 36,08333\dots \rightarrow 36,111\dots > 36,08333\dots$
 • $1000 \rightarrow \frac{1000}{36} = 27,777\dots$ en $\frac{1000}{48} + 9 = 29,83333\dots \rightarrow 27,777\dots < 29,83333\dots$

- De referentieverzameling is $\mathbb{R}_0^+$.

Antwoord: De totale kostprijs van de busreis is minstens 1296 euro.



74

Bepaal de waarde van a zodat de vergelijking geen oplossingen heeft.

a) $ax = 5$

b) $(3 - a)x = -9$

c) $(4a - 12)x = 4$

a) Als $a = 0$
 heeft $ax = 5$
 geen oplossingen,
 want $ax = 5$
 wordt $0x = 5$

b) Als $3 - a = 0$ of $a = 3$
 heeft $(3 - a)x = -9$
 geen oplossingen,
 want $(3 - a)x = -9$
 wordt $0x = -9$

c) Als $4a - 12 = 0$ of $a = \frac{12}{4} = 3$
 heeft $(4a - 12)x = 4$
 geen oplossingen,
 want $(4a - 12)x = 4$
 wordt $0x = 4$



75

Bepaal de waarde van a zodat de vergelijking oneindig veel oplossingen heeft.

a) $ax = 0$

b) $(5 - a)x = 0$

c) $ax + 3 = 5x + 3$

a) Als $a = 0$
 heeft $ax = 0$
 oneindig veel oplossingen,
 want $ax = 0$
 wordt $0x = 0$

b) Als $5 - a = 0$ of $a = 5$
 heeft $(5 - a)x = 0$
 oneindig veel oplossingen,
 want $(5 - a)x = 0$
 wordt $0x = 0$

c) $ax + 3 = 5x + 3$
 $ax - 5x = 3 - 3$
 $(a - 5)x = 0$
 Als $a - 5 = 0$ of $a = 5$
 heeft $(a - 5)x = 0$
 oneindig veel oplossingen,
 want $(a - 5)x = 0$
 wordt $0x = 0$



76

Los de volgende ongelijkheid met onbekende x op in $\mathbb{R}$ als je weet dat $m = -3$.

$$(2m + 3)x - 4 \leq 5 - m$$

$$(2m + 3)x - 4 \leq 5 - m$$

$$(2 \cdot (-3) + 3)x - 4 \leq 5 - (-3)$$

$$(-6 + 3)x - 4 \leq 5 + 3$$

$$-3x - 4 \leq 8$$

$$-3x \leq 8 + 4$$

$$-3x \leq 12$$

$$x \geq \frac{12}{-3}$$

$$x \geq -4$$

$$V = [-4, +\infty[$$



77

Los de volgende ongelijkheden op in $\mathbb{R}$ met onbekende x en parameter a .

a) $a + x \leq 2$

e) $x - 6a > 2a$

b) $x - a < 0$

f) $x + a \geq 3a$

c) $x + 4 \geq a$

g) $a \geq x - 2a$

d) $x - 5 \leq 5a$

h) $-3 > x - a$

a) $a + x \leq 2$

$$x \leq 2 - a$$

$$V =]-\infty, 2 - a]$$

e) $x - 6a > 2a$

$$x > 2a + 6a$$

$$x > 8a$$

$$V =]8a, +\infty[$$

b) $x - a < 0$

$$x < 0 + a$$

$$x < a$$

$$V =]-\infty, a]$$

f) $x + a \geq 3a$

$$x \geq 3a - a$$

$$x \geq 2a$$

$$V = [2a, +\infty[$$

c) $x + 4 \geq a$

$$x \geq a - 4$$

$$V = [a - 4, +\infty[$$

g) $a \geq x - 2a$

$$x - 2a \leq a$$

$$x \leq a + 2a$$

$$x \leq 3a$$

$$V =]-\infty, 3a]$$

d) $x - 5 \leq 5a$

$$x \leq 5a + 5$$

$$V =]-\infty, 5a + 5]$$

h) $-3 > x - a$

$$x - a < -3$$

$$x < -3 + a$$

$$V =]-\infty, -3 + a[$$



78

Los de volgende ongelijkheden op in $\mathbb{R}$ met onbekende x en parameter b .

a) $3x < b$

c) $10b \geq 5x$

b) $-2x \leq 4b$

d) $12b > -3x$

a) $3x < b$

$$x < \frac{b}{3}$$

$$V =]-\infty, \frac{b}{3}[$$

c) $10b \geq 5x$

$$5x \leq 10b$$

$$x \leq \frac{10b}{5}$$

$$x \leq 2b$$

$$V =]-\infty, 2b]$$

b) $-2x \leq 4b$

$$x \geq \frac{4b}{-2}$$

$$x \geq -2b$$

$$V = [-2b, +\infty[$$

d) $12b > -3x$

$$-3x < 12b$$

$$x > \frac{12b}{-3}$$

$$x > -4b$$

$$V =]-4b, +\infty[$$



79

Als $-2x \geq 6m$ dan kunnen we besluiten dat...

☐ $x \leq -3$

☐ $x \geq -3m$

☐ $x \geq 3m$

☒ $x \leq -3m$

$$-2x \geq 6m$$

$$x \leq \frac{6m}{-2}$$

$$x \leq -3m$$



80

Als $ax \leq 10a$, wat kan je dan besluiten als...

a) $a \in \mathbb{R}_0^+$ (a is strikt positief)

b) $a \in \mathbb{R}_0^-$ (a is strikt negatief)

Is de ongelijkheid identiek of vals als $a = 0$?

a) $x \leq \frac{10a}{a} \iff x \leq 10$

b) $x \geq \frac{10a}{a} \iff x \geq 10$

Als $a = 0$ dan geldt $0 \leq 0$ en is de ongelijkheid identiek ($V = \mathbb{R}$).

81

Bespreek de volgende ongelijkheden in $\mathbb{R}$ met onbekende x en parameter a .

a) $2x + 4a \leq -6a$

b) $3ax \geq -6a$

c) $ax < 0$

d) $-5x > 45a$

a) $2x + 4a \leq -6a$

$$2x \leq -6a - 4a$$

$$2x \leq -10a$$

$$x \leq \frac{-10a}{2}$$

$$x \leq -5a$$

$$V =]-\infty, -5a[$$

b) $3ax \geq -6a$

geval ① $a > 0$

$$x \geq \frac{-6a}{3a}$$

$$x \geq -2 \quad V = [-2, +\infty[$$

geval ② $a < 0$

$$x \leq \frac{-6a}{3a}$$

$$x \leq -2 \quad V =]-\infty, -2]$$

geval ③ $a = 0$

$$0x \geq 0$$

identieke ongelijkheid ($V = \mathbb{R}$)

c) $ax < 0$

geval ① $a > 0$

$$x < \frac{0}{a}$$

$$x < 0$$

geval ② $a < 0 \quad V =]-\infty, 0[$

$$x > \frac{0}{a}$$

$$x > 0 \quad V =]0, +\infty[$$

geval ③ $a = 0$

$$0x < 0$$

valse ongelijkheid ($V = \emptyset$)

d) $-5x > 45a$

$$x < \frac{45a}{-5}$$

$$x < -9a$$

$$V =]-\infty, -9a[$$



82

Bespreek de volgende ongelijkheden in $\mathbb{R}$ met onbekende x en parameter a .

a) $ax + 3 < 2x + 5$

b) $5x + 2 \geq 4 - 3a$

c) $3x - 6 > 12a$

d) $ax - 2a + 5 > a$

a) $ax + 3 < 2x + 5$

$$ax - 2x < 5 - 3$$

$$(a - 2)x < 2$$

geval ① $a - 2 > 0 \quad (a > 2)$

$$x < \frac{2}{a - 2} \quad V =]-\infty, \frac{2}{a - 2}[$$

geval ② $a - 2 < 0 \quad (a < 2)$

$$x > \frac{2}{a - 2} \quad V =]\frac{2}{a - 2}, +\infty[$$

geval ③ $a - 2 = 0 \quad (a = 2)$

$$0x < 2$$

identieke ongelijkheid ($V = \mathbb{R}$)

b) $5x + 2 \geq 4 - 3a$

$$5x \geq 2 - 3a$$

$$x \geq \frac{2 - 3a}{5}$$

$$V = \left[\frac{2 - 3a}{5}, +\infty \right[$$

c) $3x - 6 > 12a$

$$3x > 12a + 6$$

$$x > \frac{12a + 6}{3}$$

$$x > \frac{3(4a + 2)}{3}$$

$$x > 4a + 2$$

$$V =]4a + 2, +\infty[$$

d) $ax - 2a + 5 > a$

$$ax > a + 2a - 5$$

$$ax > 3a - 5$$

geval ① $a > 0$

$$x > \frac{3a - 5}{a} \quad V = \left] \frac{3a - 5}{a}, +\infty \right[$$

geval ② $a < 0$

$$x < \frac{3a - 5}{a} \quad V = \left] -\infty, \frac{3a - 5}{a} \right[$$

geval ③ $a = 0$

$$0x > 0 - 5$$

$$0x > -5$$

identieke ongelijkheid ($V = \mathbb{R}$)



Los op en bespreek de volgende vergelijkingen. De parameters stellen reële getallen voor.

a) $ax = 14$

b) $x + a = -9$

c) $7x + a = 21$

d) $ax = \frac{4}{5}$

e) $-3ax = \sqrt{6}$

f) $3a = 4x - a$

g) $2ax - 4 = ax - 6$

h) $ax - 1 = 4$

i) $9x + 3a = 4x - a$

a) $ax = 14$

Geval 1: $a \neq 0$

$x = \frac{14}{a}$ heeft 1 oplossing $V = \left\{ \frac{14}{a} \right\}$

Geval 2: $a = 0$ $ax = 14$ wordt $0x = 14$ heeft geen oplossingen
 $V = \emptyset$

b) $x + a = -9$

$x = -9 - a$ heeft 1 oplossing $V = \{-9 - a\}$

c) $7x + a = 21$

$7x = 21 - a$

$x = \frac{21 - a}{7}$ heeft 1 oplossing $V = \left\{ \frac{21 - a}{7} \right\}$

d) $ax = \frac{4}{5}$

Geval 1: $a \neq 0$

$x = \frac{4}{5a}$ heeft 1 oplossing $V = \left\{ \frac{4}{5a} \right\}$

Geval 2: $a = 0$

$ax = \frac{4}{5}$

wordt $0x = \frac{4}{5}$ heeft geen oplossingen $V = \emptyset$

e) $-3ax = \sqrt{6}$

$ax = \frac{\sqrt{6}}{-3}$

Geval 1: $a \neq 0$

$x = \frac{\sqrt{6}}{-3a}$ heeft 1 oplossing $V = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{-3a} \right\}$

Geval 2: $a = 0$

$ax = \frac{\sqrt{6}}{-3}$ wordt $0x = \frac{\sqrt{6}}{-3}$

heeft geen oplossingen $V = \emptyset$

f) $3a = 4x - a$

$4x = 3a + a$

$4x = 4a$

$x = \frac{4a}{4}$

$x = a$ heeft 1 oplossing $V = \{a\}$

g) $2ax - 4 = ax - 6$

$2ax - ax = -6 + 4$

$ax = -2$

Geval 1: $a \neq 0$

$x = \frac{-2}{a}$ heeft 1 oplossing $V = \left\{ \frac{-2}{a} \right\}$

Geval 2: $a = 0$

$ax = -2$ wordt $0x = -2$

heeft geen oplossingen $V = \emptyset$

h) $ax - 1 = 4$

$ax = 4 + 1$

$ax = 5$

Geval 1: $a \neq 0$

$x = \frac{5}{a}$ heeft 1 oplossing $V = \left\{ \frac{5}{a} \right\}$

Geval 2: $a = 0$

$ax = 5$ wordt $0x = 5$

heeft geen oplossingen $V = \emptyset$

i) $9x + 3a = 4x - a$

$9x - 4x = -a - 3a$

$5x = -4a$

$x = \frac{-4a}{5}$ heeft 1 oplossing $V = \left\{ \frac{-4a}{5} \right\}$



Los op en bespreek de volgende vergelijkingen. De parameters stellen reële getallen voor.

a) $ax + b = 4$

d) $4(2 - ax) - b = 0$

b) $(a - 3)x = b$

e) $3x - 3 = ax + a$

c) $\frac{ax+6}{2} + b = 3$

f) $(3a - 5)x = 2b - 9$

a) $ax + b = 4$

$$ax = 4 - b$$

Geval 1: $a \neq 0$

$$x = \frac{4-b}{a} \text{ heeft 1 oplossing } V = \left\{ \frac{4-b}{a} \right\}$$

Geval 2: $a = 0$

$$ax = 4 - b \text{ wordt } 0x = 4 - b$$

Geval 2.1: $4 - b = 0$ of $b = 4$

$$0x = 4 - b \text{ wordt } 0x = 0$$

heeft oneindig veel oplossingen $V = \mathbb{R}$

Elk reëel getal is een oplossing.

Geval 2.2: $4 - b \neq 0$ of $b \neq 4$

$$0x = 4 - b \text{ heeft geen oplossingen } V = \emptyset$$

b) $(a - 3)x = b$

Geval 1: $a - 3 \neq 0$ of $a \neq 3$

$$x = \frac{b}{a-3} \text{ heeft 1 oplossing } V = \left\{ \frac{b}{a-3} \right\}$$

Geval 2: $a - 3 = 0$ of $a = 3$

$$(a - 3)x = b \text{ wordt } 0x = b$$

Geval 2.1: $b = 0$

$$0x = b \text{ wordt } 0x = 0$$

heeft oneindig veel oplossingen $V = \mathbb{R}$

Elk reëel getal is een oplossing.

Geval 2.2: $b \neq 0$

$$0x = b \text{ heeft geen oplossingen } V = \emptyset$$

c) $\frac{ax+6}{2} + b = 3$

$$\frac{ax+6}{2} = 3 - b$$

$$ax + 6 = 2(3 - b)$$

$$ax + 6 = 6 - 2b$$

$$ax = 6 - 2b - 6$$

$$ax = -2b$$

Geval 1: $a \neq 0$

$$x = \frac{-2b}{a} \text{ heeft 1 oplossing } V = \left\{ \frac{-2b}{a} \right\}$$

Geval 2: $a = 0$

$$ax = -2b \text{ wordt } 0x = -2b$$

Geval 2.1: $b = 0$

$$0x = -2b \text{ wordt } 0x = 0$$

heeft oneindig veel oplossingen $V = \mathbb{R}$

Elk reëel getal is een oplossing.

Geval 2.2: $b \neq 0$

$$0x = -2b \text{ heeft geen oplossingen } V = \emptyset$$

d) $4(2 - ax) - b = 0$

$$8 - 4ax - b = 0$$

$$-4ax = b - 8$$

$$ax = \frac{b-8}{-4}$$

Geval 1: $a \neq 0$

$$x = \frac{b-8}{-4a} \text{ heeft 1 oplossing } V = \left\{ \frac{b-8}{-4a} \right\}$$

Geval 2: $a = 0$

$$ax = \frac{b-8}{-4}$$

$$\text{wordt } 0x = \frac{b-8}{-4}$$

Geval 2.1: $b-8 = 0$ of $b = 8$

$$0x = \frac{b-8}{-4} \text{ wordt } 0x = 0$$

heeft oneindig veel oplossingen $V = \mathbb{R}$

Elk reëel getal is een oplossing.

Geval 2.2: $b-8 \neq 0$ of $b \neq 8$

$$0x = \frac{b-8}{-4} \text{ heeft geen oplossingen } V = \emptyset$$

e) $3x - 3 = ax + a$

$$3x - ax = a + 3$$

$$(3 - a)x = a + 3$$

Geval 1: $3 - a \neq 0$ of $a \neq 3$

$$x = \frac{a+3}{3-a} \text{ heeft 1 oplossing } V = \left\{ \frac{a+3}{3-a} \right\}$$

Geval 2: $3 - a = 0$ of $a = 3$

$$(3 - a)x = a + 3 \text{ wordt}$$

$$0x = 6 \text{ heeft geen oplossingen } V = \emptyset$$

f) $(3a - 5)x = 2b - 9$

Geval 1: $3a - 5 \neq 0$ of $a \neq \frac{5}{3}$

$$x = \frac{2b-9}{3a-5} \text{ heeft 1 oplossing } V = \left\{ \frac{2b-9}{3a-5} \right\}$$

Geval 2: $3a - 5 = 0$ of $a = \frac{5}{3}$

$$(3a - 5)x = 2b - 9$$

$$\text{wordt } 0x = 2b - 9$$

Geval 2.1: $2b - 9 = 0$

$$\text{of } b = \frac{9}{2}$$

$$0x = 2b - 9 \text{ wordt } 0x = 0$$

heeft oneindig veel oplossingen $V = \mathbb{R}$

Elk reëel getal is een oplossing.

Geval 2.2: $2b - 9 \neq 0$

$$\text{of } b \neq \frac{9}{2}$$

$$0x = 2b - 9$$

heeft geen oplossingen $V = \emptyset$



Los op en bespreek de volgende vergelijkingen. De parameters stellen reële getallen voor.

Voorbeeld:

Je kunt ook parametervergelijkingen hebben met meerdere parameters zoals $ax + b = 2$. In deze vergelijking zijn a en b de parameters.

$$ax + b = 2$$

$$ax = 2 - b$$

Bespreking van $ax = 2 - b$

Geval 1: $a \neq 0$

$$ax = 2 - b$$

$$x = \frac{2 - b}{a}$$

De vergelijking heeft 1 oplossing. $V = \left\{ \frac{2 - b}{a} \right\}$

Geval 2: $a = 0$

$$ax = 2 - b \text{ wordt } 0x = 2 - b$$

De oplossing hangt af van het rechterlid.

Geval 2.1: $2 - b = 0$ of $b = 2$

$$0x = 2 - b \text{ wordt } 0x = 0$$

Dit is een onbepaalde vergelijking.

Deze vergelijking heeft oneindig veel oplossingen.

Elk reëel getal is een oplossing van deze vergelijking. $V = \mathbb{R}$

Geval 2.2: $2 - b \neq 0$ of $b \neq 2$

$$0x = 2 - b \text{ (met } 2 - b \in \mathbb{R}_0)$$

Dit is een valse vergelijking.

De vergelijking heeft geen oplossingen. $V = \{\}$

a) $-4x + b = 3ax - 1$

b) $ax + b = 3b + 2x$

c) $(a - 5)x + 2 = 3ax + b$

d) $6(b - x) = 2(ax + 4)$

e) $7a - 4x = 3(1 - b)x$

f) $2ax + 4 = bx - 9$

a) $-4x + b = 3ax - 1$
 $-4x - 3ax = -1 - b$
 $(-4 - 3a)x = -1 - b$
 $(4 + 3a)x = 1 + b$
 Geval 1: $4 + 3a \neq 0$
 of $a \neq -\frac{4}{3}$
 $x = \frac{1+b}{4+3a}$ heeft 1 oplossing $V = \left\{ \frac{1+b}{4+3a} \right\}$
 Geval 2: $4 + 3a = 0$
 of $a = -\frac{4}{3}$
 $(4 + 3a)x = 1 + b$
 wordt $0x = 1 + b$
 Geval 2.1: $1 + b = 0$ of $b = -1$
 $0x = 1 + b$ wordt $0x = 0$
 heeft oneindig veel oplossingen $V = \mathbb{R}$
 Elk reëel getal is een oplossing.
 Geval 2.2: $1 + b \neq 0$ of $b \neq -1$
 $0x = 1 + b$ heeft geen oplossingen $V = \{\}$

b) $ax + b = 3b + 2x$
 $ax - 2x = 3b - b$
 $(a - 2)x = 2b$
 Geval 1: $a - 2 \neq 0$ of $a \neq 2$
 $x = \frac{2b}{a-2}$ heeft 1 oplossing $V = \left\{ \frac{2b}{a-2} \right\}$
 Geval 2: $a - 2 = 0$ of $a = 2$
 $(a - 2)x = 2b$ wordt $0x = 2b$
 Geval 2.1: $b = 0$
 $0x = 2b$ wordt $0x = 0$
 heeft oneindig veel oplossingen $V = \mathbb{R}$
 Elk reëel getal is een oplossing.
 Geval 2.2: $b \neq 0$
 $0x = 2b$ heeft geen oplossingen $V = \{\}$

c) $(a - 5)x + 2 = 3ax + b$
 $ax - 5x - 3ax = b - 2$
 $(a - 5 - 3a)x = b - 2$
 $(-5 - 2a)x = b - 2$
 Geval 1: $-5 - 2a \neq 0$
 of $a \neq -\frac{5}{2}$
 $x = \frac{b-2}{-5-2a}$ heeft 1 oplossing $V = \left\{ \frac{b-2}{-5-2a} \right\}$
 Geval 2: $-5 - 2a = 0$ of
 $a = -\frac{5}{2}$
 $(-5 - 2a)x = b - 2$
 wordt $0x = b - 2$
 Geval 2.1: $b - 2 = 0$ of $b = 2$
 $0x = b - 2$ wordt $0x = 0$
 heeft oneindig veel oplossingen $V = \mathbb{R}$
 Elk reëel getal is een oplossing.
 Geval 2.2: $b - 2 \neq 0$ of $b \neq 2$
 $0x = b - 2$ heeft geen oplossingen $V = \{\}$

d) $6(b - x) = 2(ax + 4)$

$$6b - 6x = 2ax + 8$$

$$-6x - 2ax = 8 - 6b$$

$$(-6 - 2a)x = 8 - 6b$$

$$(6 + 2a)x = 6b - 8$$

Geval 1: $6 + 2a \neq 0$ of $a \neq -3$

$$x = \frac{6b - 8}{6 + 2a} \text{ heeft 1 oplossing } V = \left\{ \frac{6b - 8}{6 + 2a} \right\}$$

Geval 2: $6 + 2a = 0$ of $a = -3$

$$(6 + 2a)x = 6b - 8$$

$$\text{wordt } 0x = 6b - 8$$

Geval 2.1: $6b - 8 = 0$

$$\text{of } b = \frac{4}{3}$$

$$0x = 6b - 8 \text{ wordt } 0x = 0$$

heeft oneindig veel oplossingen $V = \mathbb{R}$

Elk reëel getal is een oplossing.

Geval 2.2: $6b - 8 \neq 0$ of $b \neq \frac{4}{3}$

$$0x = 6b - 8 \text{ heeft geen oplossingen } V = \{\}$$

e) $7a - 4x = 3(1 - b)x$

$$7a - 4x = 3x - 3bx$$

$$-4x - 3x + 3bx = -7a$$

$$(-4 - 3 + 3b)x = -7a$$

$$(-7 + 3b)x = -7a$$

Geval 1: $-7 + 3b \neq 0$

$$\text{of } b \neq \frac{7}{3}$$

$$x = \frac{-7a}{-7 + 3b} \text{ heeft 1 oplossing } V = \left\{ \frac{-7a}{-7 + 3b} \right\}$$

Geval 2: $-7 + 3b = 0$

$$\text{of } b = \frac{7}{3}$$

$$(-7 + 3b)x = -7a$$

$$\text{wordt } 0x = -7a$$

Geval 2.1: $a = 0$

$$0x = -7a \text{ wordt } 0x = 0$$

heeft oneindig veel oplossingen $V = \mathbb{R}$

Elk reëel getal is een oplossing.

Geval 2.2: $a \neq 0$

$$0x = -7a \text{ heeft geen oplossingen } V = \{\}$$

f) $2ax + 4 = bx - 9$

$$2ax - bx = -9 - 4$$

$$(2a - b)x = -13$$

Geval 1: $2a - b \neq 0$

$$\text{of } a \neq \frac{b}{2}$$

$$x = \frac{-13}{2a - b} \text{ heeft 1 oplossing } V = \left\{ \frac{-13}{2a - b} \right\}$$

Geval 2: $2a - b = 0$ of $a = \frac{b}{2}$

$$(2a - b)x = -13$$

$$\text{wordt } 0x = -13 \text{ heeft geen oplossingen } V = \{\}$$



Bespreek de volgende ongelijkheden in $\mathbb{R}$ met onbekende x en parameter a .

a) $(3a - 4)x - 4(x + 2) + 8 \leq 0$

b) $5x - 2 > ax + 8$

c) $6a(x - 4) < 2ax$

d) $2(4a - 3x) - 4 \geq 12 - 3ax$

a) $(3a - 4)x - 4(x + 2) + 8 \leq 0$

$$3ax - 4x - 4x - 8 + 8 \leq 0$$

$$3ax - 8x \leq 0$$

$$(3a - 8)x \leq 0$$

geval ① $3a - 8 > 0 \quad \left(a > \frac{8}{3}\right)$

$$x \leq \frac{0}{3a - 8}$$

$$x \leq 0 \quad V =]-\infty, 0\}$$

geval ② $3a - 8 < 0 \quad \left(a < \frac{8}{3}\right)$

$$x \geq \frac{0}{3a - 8}$$

$$x \geq 0 \quad V = [0, +\infty[$$

geval ③ $3a - 8 = 0 \quad \left(a = \frac{8}{3}\right)$

$$0 \cdot x \leq 0$$

identieke ongelijkheid ($V = \mathbb{R}$)

c) $6a(x - 4) < 2ax$

$$6ax - 24a < 2ax$$

$$6ax - 2ax < 24a$$

$$4ax < 24a$$

geval ① $4a > 0 \quad (a > 0)$

$$x < \frac{24a}{4a}$$

$$x < 6a \quad V =]-\infty, 6a[$$

geval ② $4a < 0 \quad (a < 0)$

$$x > \frac{24a}{4a}$$

$$x > 6 \quad V =]6, +\infty[$$

geval ③ $4a = 0 \quad (a = 0)$

$$0x < 0$$

valse ongelijkheid ($V = \emptyset$)

b) $5x - 2 > ax + 8$

$$5x - ax > 8 + 2$$

$$(5 - a)x > 10$$

geval ① $5 - a > 0 \quad (a < 5)$

$$x > \frac{10}{5 - a} \quad V = \left] \frac{10}{5 - a}, +\infty \right[$$

geval ② $5 - a < 0 \quad (a > 5)$

$$x < \frac{10}{5 - a} \quad V = \left] -\infty, \frac{10}{5 - a} \right[$$

geval ③ $5 - a = 0 \quad (a = 5)$

$$0x > 10$$

valse ongelijkheid ($V = \emptyset$)

d) $2(4a - 3x) - 4 \geq 12 - 3ax$

$$8a - 6x - 4 \geq 12 - 3ax$$

$$-6x + 3ax \geq 12 + 4 - 8a$$

$$(-6 + 3a)x \geq 16 - 8a$$

geval ① $-6 + 3a > 0 \quad (a > 2)$

$$x \geq \frac{16 - 8a}{-6 + 3a}$$

$$x \geq \frac{8(2 - a)}{-3(2 - a)}$$

$$x \geq -\frac{8}{3} \quad V = \left[-\frac{8}{3}, +\infty \right[$$

geval ② $-6 + 3a < 0 \quad (a < 2)$

$$x \leq \frac{16 - 8a}{-6 + 3a}$$

$$x \leq \frac{8(2 - a)}{-3(2 - a)}$$

$$x \leq -\frac{8}{3} \quad V = \left] -\infty, -\frac{8}{3} \right]$$

geval ③ $-6 + 3a = 0 \quad (a = 2)$

$$0x \geq 16 - 8 \cdot 2$$

$$0x \geq 0$$

identieke ongelijkheid ($V = \mathbb{R}$)



87

Bepaal alle waarden van m zodat ...

- a) $mx + 4 \leq 6(x - 1)$ een valse ongelijkheid is.
 b) $(3m - 4)x \leq 6$ een identieke ongelijkheid is.
 c) $-2 + 5mx > 8x$ een valse ongelijkheid is.

$$\text{a) } mx + 4 \leq 6(x - 1)$$

$$mx + 4 \leq 6x - 6$$

$$(m - 6)x \leq -10$$

$$\text{als } m - 6 = 0 \quad (m = 6)$$

$$\text{dan: } 0x \leq -10$$

valse ongelijkheid

$$\text{c) } -2 + 5mx > 8x$$

$$5mx - 8x > 2$$

$$(5m - 8)x > 2$$

$$\text{als } 5m - 8 = 0 \quad \left(m = \frac{8}{5}\right)$$

$$\text{dan: } 0x > 2$$

valse ongelijkheid

$$\text{b) } (3m - 4)x \leq 6$$

$$\text{als } 3m - 4 = 0 \quad \left(m = \frac{4}{3}\right)$$

$$\text{dan: } 0x \leq 6$$

identieke ongelijkheid



88

Bepaal $a \in \mathbb{R}$ opdat $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 6\}$ de oplossingenverzameling is van de ongelijkheid

$$3x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x + a \right) < 10 + \frac{2}{3}x$$

$$3x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x + a \right) < 10 + \frac{2}{3}x$$

$$3x - \frac{1}{4}x - \frac{a}{2} < 10 + \frac{2}{3}x$$

$$36x - 3x - 6a < 120 + 8x$$

$$36x - 3x - 8x < 120 + 6a$$

$$25x < 120 + 6a$$

$$x < \frac{120 + 6a}{25}$$

$$\text{en } \frac{120 + 6a}{25} = 6$$

$$120 + 6a = 150$$

$$6a = 150 - 120$$

$$6a = 30$$

$$a = \frac{30}{6}$$

$$a = 5$$



Bespreek de volgende ongelijkheden in $\mathbb{R}$ met onbekende x en parameter m .

a) $6 - mx \geq 2(1 - 3m)$

c) $\frac{mx - 1}{2} - \frac{3 - x}{4} > m + \frac{1}{3}$

b) $(m - 2)x + 4 \leq 2m - x$

d) $\frac{2}{3}(x - m) < m(x - 2) + \frac{4}{3}$

a) $6 - mx \geq 2(1 - 3m)$

$$6 - mx \geq 2 - 6m$$

$$-mx \geq 2 - 6m - 6$$

$$-mx \geq -4 - 6m$$

$$mx \leq 4 + 6m$$

geval ① $m > 0$

$$x \leq \frac{4 + 6m}{m} \quad V = \left] -\infty, \frac{4 + 6m}{m} \right]$$

geval ② $m < 0$

$$x \geq \frac{4 + 6m}{m} \quad V = \left[\frac{4 + 6m}{m}, +\infty \right[$$

geval ③ $m = 0$

$$0x \leq 4 + 0$$

identieke ongelijkheid ($V = \mathbb{R}$)

b) $(m - 2)x + 4 \leq 2m - x$

$$mx - 2x + 4 \leq 2m - x$$

$$mx - 2x + x \leq 2m - 4$$

$$mx - x \leq 2m - 4$$

$$(m - 1)x \leq 2m - 4$$

geval ① $m - 1 > 0$ ($m > 1$)

$$x \leq \frac{2m - 4}{m - 1} \quad V = \left] -\infty, \frac{2m - 4}{m - 1} \right]$$

geval ② $m - 1 < 0$ ($m < 1$)

$$x \geq \frac{2m - 4}{m - 1} \quad V = \left[\frac{2m - 4}{m - 1}, +\infty \right[$$

geval ③ $m - 1 = 0$ ($m = 1$)

$$0x \leq 2 - 4$$

$$0x \leq -2$$

valse ongelijkheid ($V = \emptyset$)

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \frac{mx-1}{2} - \frac{3-x}{4} &> m + \frac{1}{3} \\
 6(mx-1) - 3(3-x) &> 12m+4 \\
 6mx-6-9+3x &> 12m+4 \\
 6mx+3x &> 12m+4+6+9 \\
 (6m+3)x &> 12m+19
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{geval ① } 6m+3 &> 0 & \left(m > -\frac{1}{2}\right) \\
 x &> \frac{12m+19}{6m+3} \quad V = \left] \frac{12m+19}{6m+3}, +\infty \right[
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{geval ② } 6m+3 &< 0 & \left(m < -\frac{1}{2}\right) \\
 x &< \frac{12m+19}{6m+3} \quad V = \left] -\infty, \frac{12m+19}{6m+3} \right[
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{geval ③ } 6m+3 &= 0 & \left(m = -\frac{1}{2}\right) \\
 0x &> -6+19 \\
 0x &> 13
 \end{aligned}$$

valse ongelijkheid ($V = \emptyset$)

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \frac{2}{3}(x-m) &< m(x-2) + \frac{4}{3} \\
 \frac{2}{3}x - \frac{2m}{3} &< mx - 2m + \frac{4}{3} \\
 2x - 2m &< 3mx - 6m + 4 \\
 2x - 3mx &< -6m + 2m + 4 \\
 (2-3m)x &< -4m + 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{geval ① } 2-3m &> 0 & \left(m < \frac{2}{3}\right) \\
 x &< \frac{-4m+4}{2-3m} \quad V = \left] -\infty, \frac{-4m+4}{2-3m} \right[
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{geval ② } 2-3m &< 0 & \left(m > \frac{2}{3}\right) \\
 x &> \frac{-4m+4}{2-3m} \quad V = \left] \frac{-4m+4}{2-3m}, +\infty \right[
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{geval ③ } 2-3m &= 0 & \left(m = \frac{2}{3}\right) \\
 0x &< -4 \cdot \frac{2}{3} + 4 \\
 0x &< \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

identieke ongelijkheid ($V = \mathbb{R}$)



- a) Voor welke waarde(n) van de parameter m heeft de ongelijkheid $mx \leq 0$ met onbekende x als oplossingenverzameling $\mathbb{R}^+$?
- b) Bepaal de waarden van de parameters a en b zodat de ongelijkheid $ax - 4 \leq 3x + b + 5$ met onbekende x als oplossingenverzameling $\mathbb{R}^+$ heeft.
Gebruik hiervoor de informatie afgeleid in vraag a.

a) $mx \leq 0$

Als $m < 0$ dan: $x \geq \frac{0}{m}$ of dus $x \geq 0$
 $V = \mathbb{R}^+$ als $m < 0$

b) $ax - 4 \leq 3x + b + 5$

$$ax - 3x \leq b + 5 + 4$$

$$(a - 3)x \leq b + 9$$

Als $a - 3 < 0$ dan $a < 3$

dan $x \geq \frac{b + 9}{a - 3}$

en $\frac{b + 9}{a - 3} = 0$ als $b = -9$

Dus: als $a < 3$ en $b = -9$ dan $V = \mathbb{R}^+$

